

Feuille de T. P. : Utilisation d'un solveur SAT

Format DIMACS Exemple : la formule $(x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$ peut être codée par un fichier `exemple.cnf` contenant :

```
c exemple de fichier au format CNF
p cnf 4 3
1 3 -4 0
4 0
2 -3
0
```

Dans cet exemple, les propositions x_1 , x_2 , x_3 et x_4 sont respectivement codées par les entiers 1, 2, 3 et 4.

Exercice 1 : Format DIMACS

Ecrire l'exemple précédent dans un fichier `test.cnf` à l'aide d'un éditeur. Déterminer ensuite si la formule est satisfaisable en lançant la commande `minisat test.cnf`

On obtient SAT

Pour obtenir les modèles, il faut ajouter un fichier texte en deuxième argument de la commande. Les modèles seront alors écrits dans ce fichier.

```
minisat test.cnf result.txt
```

On constate que l'on obtient un seul modèle dans le fichier alors qu'il y a 4 modèles . Pour obtenir tous les modèles voir Exercice 3

Exercice 2 : Test des exercices du cours

Tester avec le solveur MiniSat les exercices suivants vus en cours :

- $S = \{p \vee q, p \vee r, \neg q \vee \neg r, \neg p\}$

```
p cnf 3 4
1 2 0
1 3 0
-2 -3 0
-1
0
```

UNSAT

- $S = \{\neg a \vee b, a, \neg b\}$

```
p cnf 3 2
-1 2 0
1 0
-2
0
```

UNSAT

- $\{p \rightarrow r, q \rightarrow r\} \models (p \vee q) \rightarrow r$. L'ensemble de clauses correspondant est $C = \{\neg p \vee r, \neg q \vee r, p \vee q, \neg r\}$

```
p cnf 3 4
-1 3 0
-2 3 0
1 2 0
-3
0
```

UNSAT

Exercice 3 : obtenir tous les modèles

La formule $F = (x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$ a 4 modèles :

```
0 1 1 1 au format dimacs : -1 2 3 4
1 0 0 1 au format dimacs : 1 -2 -3 4
1 1 0 1 au format dimacs : 1 2 -3 4
1 1 1 1 au format dimacs : 1 2 3 4
```

La commande suivante ne donne qu'un seul modèle : comment obtenir les autres ?

```
minisat test.cnf result.txt
```

Si le modèle obtenu est 0 1 1 1 au format dimacs : -1 2 3 4 il correspond à la formule $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$ pour obtenir un autre modèle on ajoute la clause $\neg(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) = x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4$ qui correspond au format dimacs : 1 -2 -3 -4. et on relance minisat en ajoutant cette nouvelle clause et en n'oubliant pas de changer le nombre total de clause sur la ligne commençant par p soit :

```
p cnf 4 4
1 3 -4 0
4 0
2 -3 0
1 -2 -3 -4
0
```

et ainsi de suite

Ecrire un script ou un programme C qui sauvegarde tous les modèles dans un fichier : ici un shell script : toutesol.sh

```
#!/bin/bash
echo Script donnant toutes les solutions... ;
cp $1 tmp.cnf
minisat tmp.cnf sol
test_sat='grep "SAT" sol'

while [ $test_sat = 'SAT' ]
do
    grep "[0-9]" sol > ligne_sol

    ligne_p='grep "^p cnf" tmp.cnf'

    let "nbc = 1 + 'echo $ligne_p | cut -d " " -f 4'"

    ligne_new="'echo $ligne_p | cut -d " " -f -3' $nbc"

    sed -e "s/$ligne_p/$ligne_new/g" tmp.cnf > tmp2.cnf
    sed -e 's/[1-9][0-9]*/-&/g; s/--//g;' ligne_sol >> tmp2.cnf
    cp tmp2.cnf tmp.cnf
    rm tmp2.cnf
    rm ligne_sol

    minisat tmp.cnf sol
    test_sat='grep "SAT" sol'

done

echo FIN ;
exit 0
```

ATTENTION :

symbole ‘ : touche ALT 7

symbole ’ : touche 4

Exercice 3 : Coloriage de graphe (voir le cours 1)

- représenter en logique propositionnelle le problème du coloriage d'un graphe un peu plus simple que celui vu au cours 1 : coloriage avec 3 couleurs d'un graphe comportant 4 sommets : S_1, S_2, S_3, S_4 et 5 arêtes comme suit :

- une arête entre S_1 et S_2 ,
- une arête entre S_1 et S_4 ,
- une arête entre S_2 et S_3 ,
- une arête entre S_3 et S_4 ,
- une arête entre S_1 et S_3 .

- coder le problème au format DIMACS
- tester le problème avec MiniSat

Codage en logique propositionnelle :

Les variables : 12 variables, réfléchir à la numérotation pour le format DIMACS,

$S_{i,R}$ Vrai si S_i est de couleur Rouge, $1 \leq i \leq 4$

$S_{i,B}$ Vrai si S_i est de couleur Bleu, $1 \leq i \leq 4$

$S_{i,V}$ Vrai si S_i est de couleur Vert, $1 \leq i \leq 4$

Pour $1 \leq i \leq 4$: (27 clauses)

chaque sommet a au moins une couleur : $S_{i,R} \vee S_{i,B} \vee S_{i,V}$

chaque sommet a au plus une couleur :

$S_{i,R} \rightarrow (\neg S_{i,B} \wedge \neg S_{i,V})$: 2 clauses $\neg S_{i,R} \vee \neg S_{i,B}, \neg S_{i,R} \vee \neg S_{i,V}$

$S_{i,B} \rightarrow (\neg S_{i,R} \wedge \neg S_{i,V})$: 2 clauses $\neg S_{i,B} \vee \neg S_{i,R}, \neg S_{i,B} \vee \neg S_{i,V}$

$S_{i,V} \rightarrow (\neg S_{i,R} \wedge \neg S_{i,B})$: 2 clauses $\neg S_{i,V} \vee \neg S_{i,R}, \neg S_{i,V} \vee \neg S_{i,B}$

les sommets voisins ont des couleurs différentes: ensemble de couples de sommets voisins : $\{(S_1, S_2), (S_1, S_4), (S_2, S_3), (S_3, S_4), (S_1, S_3)\}$ (15 clauses)

pour tout couple de sommets voisins (S_i, S_j) :

$$S_{i,R} \rightarrow \neg S_{j,R} : 1 \text{ clause } \neg S_{i,R} \vee \neg S_{j,R}$$

$$S_{i,B} \rightarrow \neg S_{j,B} : 1 \text{ clause } \neg S_{i,B} \vee \neg S_{j,B}$$

$$S_{i,V} \rightarrow \neg S_{j,V} : 1 \text{ clause } \neg S_{i,V} \vee \neg S_{j,V}$$

Au final : 12 variables, 31 clauses (il y a des redondances).

Il y a 6 solutions :

$$(S_{1,V}, S_{2,R}, S_{3,V}, S_{4,B}), (S_{1,V}, S_{2,B}, S_{3,V}, S_{4,R}), (S_{1,R}, S_{2,B}, S_{3,R}, S_{4,V}), (S_{1,R}, S_{2,V}, S_{3,R}, S_{4,B}), \\ (S_{1,B}, S_{2,R}, S_{3,B}, S_{4,V}), (S_{1,B}, S_{2,V}, S_{3,B}, S_{4,R})$$

Exercice 4 : Les témoins (voir le cours 1)

- représenter en logique propositionnelle le problème des témoins vu au cours 1.
- coder le problème au format DIMACS
- tester le problème avec MiniSat

l'énigme des témoins : a l'issue d'un hold-up, quatre employés d'une banque décrivent le signalement de l'agresseur :

- Selon l'hôtesse, il avait les yeux bleus, était de grande taille et portait une veste et un chapeau.
- Selon le caissier, il avait les yeux noirs, était de petite taille et portait une veste et un chapeau.
- Selon la secrétaire, il avait les yeux verts, était de taille moyenne et portait un imperméable et un chapeau.
- Selon le directeur, il avait les yeux gris, était de grande taille et portait une veste et était nu tête.

Chaque témoin a décrit correctement un détail sur quatre. Par ailleurs, pour chaque détail, un témoin l'a décrit correctement.

Codage en logique propositionnelle :

11 variables, réfléchir à la numérotation pour le format DIMACS,

Ensemble de 30 clauses :

Chaque témoin a décrit correctement 1 détail sur 4 :

$yeux - bleus \vee grand \vee porte - veste \vee porte - chapeau$
 $\neg yeux - bleus \vee \neg grand$
 $\neg yeux - bleus \vee \neg porte - veste$
 $\neg yeux - bleus \vee \neg porte - chapeau$
 $\neg grand \vee \neg porte - veste$ (*)
 $\neg grand \vee \neg porte - chapeau$
 $\neg porte - veste \vee \neg porte - chapeau$ (**)

$yeux - noirs \vee petit \vee porte - veste \vee porte - chapeau$
 $\neg yeux - noirs \vee \neg petit$
 $\neg yeux - noirs \vee \neg porte - veste$
 $\neg yeux - noirs \vee \neg porte - chapeau$
 $\neg petit \vee \neg porte - veste$
 $\neg petit \vee \neg porte - chapeau$
 $\neg porte - veste \vee \neg porte - chapeau$ (redondance **)

$yeux - verts \vee moyen \vee porte - impermeable \vee porte - chapeau$
 $\neg yeux - verts \vee \neg moyen$
 $\neg yeux - verts \vee \neg porte - impermeable$
 $\neg yeux - verts \vee \neg porte - chapeau$
 $\neg moyen \vee \neg porte - impermeable$
 $\neg moyen \vee \neg porte - chapeau$
 $\neg porte - impermeable \vee \neg porte - chapeau$

$yeux - gris \vee grand \vee porte - veste \vee nu - tete$
 $\neg yeux - gris \vee \neg grand$
 $\neg yeux - gris \vee \neg porte - veste$
 $\neg yeux - gris \vee \neg nu - tete$
 $\neg grand \vee \neg porte - veste$ (redondance *)
 $\neg grand \vee \neg nu - tete$
 $\neg porte - veste \vee \neg nu - tete$

Pour chaque détail, un témoin l'a décrit correctement

$yeux - bleus \vee yeux - noirs \vee yeux - verts \vee yeux - gris$
 $grand \vee moyen \vee petit$
 $porte - veste \vee porte - impermeable$
 $porte - chapeau \vee nu - tete$

Cet ensemble de clauses est cohérent, interprétation :

$\{yeux-bleus, \neg yeux-noirs, \neg yeux-verts, \neg yeux-gris, \neg grand, \neg moyen, petit, \neg porte - veste, porte - impermeable, \neg porte - chapeau, nu - tete\}$

signalement de l'agresseur :

$yeux - bleus , petit, porte - impermeable, nu - tete$