

T. D. Logique.

Polytech'Marseille. 3^{ème} année

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

Année universitaire 2018/2019

Enseignante : Odile Papini

Exercices : logique propositionnelle

Exercice 1 :

Soit les faits suivants :

- Si Pierre vient on joue aux cartes.
- Si Pierre et Jean viennent, il y a des disputes.
- Si on ne joue pas aux cartes, il n'y a pas de dispute.
- Pierre ne vient pas

- 1) Représenter en calcul propositionnel les quatre faits.
- 2) Peut-on déduire de ces quatre faits qu'il n'y aura pas de dispute ?

Exercice 2 :

Soit les faits suivants :

- Jean affirme : "Si Bernard est coupable, Sophie l'est aussi".
- Bernard dit : "Jean est coupable et Sophie ne l'est pas".
- Sophie assure : "Elle n'est pas coupable mais au moins l'un des deux autres protagonistes l'est".

On suppose que chacune des personnes ment si et seulement si elle est coupable.

- 1) Représenter en calcul propositionnel les trois affirmations.
- 2) Existe-il une interprétation qui satisfait les trois affirmations ?

Exercice 3 :

L'inspecteur Lafrite est chargé de l'enquête concernant un vol de tableaux dans une galerie d'art. Il a demandé à Relbou et Gremai, deux de ses adjoints de l'aider dans l'affaire. L'enquête a abouti à l'arrestation de quatre personnes : Jules Rasteau, Dériré Lagrange, Michel Boileau et Félicie Ossy. Les interrogatoires sont conduits par les deux adjoints qui viennent faire leur rapport :

- F1) **Relbou** : Jules Rasteau est innocent mais je suis persuadé qu'au moins l'un des autres est coupable.
 - F2) **Gremai** : Si Dériré Lagrange est coupable, alors il n'a qu'un complice, qui est d'ailleurs parmi les autres.
 - F3) **Relbou** : Et si Michel Boileau est coupable, je pense qu'il a deux complices parmi les autres.
 - F4) **Lafrite** : Si je considère que ce que vous me dites est vrai, je peux affirmer la culpabilité de l'une des quatre personnes.
- 1) Représenter en calcul propositionnel les quatre affirmations F1, F2, F3, F4.
 - 2) L'ensemble des faits $\mathcal{F} = \{F1, F2, F3, F4\}$ est-il cohérent ? Pouvez-vous aider les inspecteurs à trouver la personne coupable ?

Exercice 4 :

Soit trois personnes Pierre, Jacques et André dont on connaît les faits suivants :

- F1) L'un des trois au moins est blond.
- F2) Si Pierre est blond mais pas Jacques, alors André est blond.
- F3) Si Jacques est blond alors Pierre ne l'est pas.
- F4) Soit André et Jacques sont tous les deux blonds, soit ils ne le sont ni l'un, ni l'autre.

- 1) Représenter en calcul propositionnel les faits F1, F2, F3, F4.
- 2) L'ensemble des faits $\mathcal{F} = \{F1, F2, F3, F4\}$ est-il cohérent ? Peut-on répondre à la question suivante : Quel(les) est (sont) la (les) personne(s) bonde(s) ?

Exercice 5 :

On considère l'ensemble de clauses propositionnelles suivant : $C = \{C_1 = \neg a \vee \neg b, C_2 = a \vee \neg c, C_3 = c, C_4 = b \vee \neg d, C_5 = d \vee b\}$. Cet ensemble de clauses est-il cohérent ? Utiliser la résolution.

Exercice 6 :

Les axiomes suivants du calcul propositionnel sont-ils des tautologies ?

- A1) $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$
- A2) $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
- A3) $((\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow P))$

Exercice 7 :

Démontrer les propriétés suivantes :

- $\models (P \leftrightarrow Q)$ ssi $P \equiv Q$
- $\models (P \wedge Q)$ ssi $\models P$ et $\models Q$
- si $\models P$ ou $\models Q$ alors $\models (P \vee Q)$

Exercice 8 :

Est-ce que A est une conséquence logique de B :

- $B = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$ et $A = q \vee r$
- $B = (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg r)$ et $A = \neg p$

Exercice 9 :

Soit \otimes un connecteur propositionnel dont la table de vérité est :

x	y	$x \otimes y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exprimer les formules $\neg x, x \wedge y, x \vee y, x \rightarrow y, x \leftrightarrow y$, uniquement avec le connecteur \otimes

Exercice 10 :

Mette les formules propositionnelles suivantes sous forme normale conjonctive :

- 1) $p \vee (\neg p \vee q \wedge r)$
- 2) $(\neg p \wedge q) \vee (p \vee \neg q)$
- 3) $\neg(p \rightarrow q) \vee (p \vee q)$

Mette les formules propositionnelles suivantes sous forme normale disjonctive :

- 1) $p \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow s)$
- 2) $\neg(p \vee \neg q) \wedge (s \rightarrow t)$
- 3) $\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$

Exercice 11 :

- 1) Soit 2 variables propositionnelles, donner la formule propositionnelle exprimant que l'une des propositions (et une seule) est vraie parmi les 2 propositions. Mettre cette formule sous forme normale conjonctive.

- 2) Généraliser ce résultat à n variables propositionnelles, en donnant la forme normale conjonctive de la formule exprimant q'une proposition (et une seule) est vraie parmi les n propositions.
- 3) Appliquer ce résultat à l'énigme des témoins : a l'issue d'un hold-up, quatre employés d'une banque décrivent le signalement de l'agresseur :
- Selon l'hôtesse, il avait les yeux bleus, était de petite taille et portait une veste et un chapeau.
 - Selon le caissier, il avait les yeux noirs, était de petite taille et portait une veste et un chapeau.
 - Selon la secrétaire, il avait les yeux verts, était de taille moyenne et portait un imperméable et un chapeau.
 - Selon le directeur, il avait les yeux gris, était de grande taille et portait une veste et était nu tête.

Chaque témoin a décrit correctement un détail sur quatre. Par ailleurs, pour chaque détail, un témoin l'a décrit correctement.