T. D. Logique.
Polytech'Marseille. 3ième année
UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE
Année universitaire 2018/2019

Enseignante : Odile Papini

exercices corrigés : logique des prédicats

Exercice 1 **:** Traduire les énonçés suivants en logique des prédicats :

1) Tous les hommes sont méchants.
   $\forall x(h(x) \rightarrow m(x))$

2) Seulement les hommes sont méchants.
   $\forall x(m(x) \rightarrow h(x))$

3) Il existe des hommes méchants.
   $\exists x(h(x) \wedge m(x))$

4) Il existe un homme qui n'est pas méchant.
   $\exists x(h(x) \wedge \neg m(x))$

5) Il n'existe pas d'homme méchant.
   $\neg(\exists x(h(x) \wedge m(x)))$

6) Il existe un homme qui aime toutes les femmes.
   $\exists x(h(x) \wedge \forall y(f(y) \rightarrow aime(x,y))$

7) Chaque chat connaît un chien qui le déteste.
   $\forall x(chat(x) \rightarrow \exists y(chien(y) \wedge connait(x,y) \wedge deteste(y,x)))$

8) Tous les poissons, sauf les requins, sont gentils avec les enfants.
   $\forall x(poisson(x) \wedge \neg requin(x) \wedge \forall y(enfant(y) \rightarrow gentil(x,y)))$

9) Tous les oiseaux ne peuvent pas voler.
   $\exists x(oiseau(x) \wedge \neg vole(x))$

10) Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde, ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.

$(\forall x \exists y\, aime(x,y) \wedge \neg(\exists x \forall y\, aime(x,y))) \vee (\exists x \forall y\, aime(x,y) \wedge \exists x \forall y \neg\, aime(x,y))$

11) Il y a des gens que l'on peut rouler tout le temps et quelquefois on peut rouler tout le monde, mais on ne peut pas rouler tout le monde à chaque fois.

$\exists x \forall t\, rouler(x,t) \wedge \exists t \forall x\, rouler(x,t) \wedge \forall t \forall x \neg\, rouler(x,t)$

12) N'importe qui peut apprendre la logique s'il travaille assez.

$\forall x(travaille - assez(x) \rightarrow apprend - logique(x))$

Exercice 2 **:** Traduire en français les formules suivantes :

1) $\forall x\ (E(x)\ \rightarrow\ (\exists y\ (C(y) \wedge \exists z\ (M(z) \wedge T(x,y,z)))))$,
avec $E(x)$: x est étudiant, $C(y)$: y est un cours, $M(z)$: z est un mauvais enseignant, $T(x,y,z)$: x suit le cours y enseigné par z.

   Tout étudiant suit un cours assuré par un mauvais enseignant

2) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (T(x) \wedge C(y,x) \wedge C(w,x) \wedge D(y,z) \wedge D(y,w)) \rightarrow G(f(g(y),g(z)),g(w))$,
avec $T(x)$: x est un triangle, $C(x,y)$: y est le côté de x, $D(x,y)$: x est différent de y, $G(x,y)$: x est plus grand que y, $f(x,y)$: somme de x et de y, $g(x)$: longueur de x.

   Pour tout triangle dont les côtés sont distincts, la somme des longueurs de deux de ses côtés est supérieure à la longueur du troisième.

Exercice 3 **:** Soit l'interprétation :
$\mathcal{L}$: { a, b : constantes, f : symbole fonctionnel, P: symbole de prédicats }

- $D : \{1,2\}$
- $I_c(a) = 1, I_c(b) = 2,\ I_c(f(1)) = 2, I_c(f(2)) = 1,\ I_c(P(2,1)) = 0, I_c(P(2,2)) = 0, I_c(P(1,2)) = 1, I_c(P(1,1)) = 1.$

Etablir la valeur de vérité des formules suivantes :
On note $V : Vrai$, $F : Faux$

1) $I(P(a, f(a))) = I_c(p)(1, f(1)) = V$.

2) $I(P(b, f(b))) = I_c(p)(2, f(2)) = F$.

3) $I(\forall x,\ \forall y\ P(y, x)) = V$ ssi $I_{x/1}(P(y, x)) = V$ et $I_{x/2}(P(y, x)) = V$.

   $I_{x/1}(P(y, x)) = V$ ssi $I_{x/1\ y/1}(P(y, x)) = V$ et $I_{x/1\ y/2}(P(y, x)) = V$

   $I_{x/2}(P(y, x)) = V$ ssi $I_{x/2\ y/1}(P(y, x)) = V$ et $I_{x/2\ y/2}(P(y, x)) = V$

   Or, $\forall x\, I_c(P(2, x)) = F$ donc $I(\forall x,\ \forall y\ P(y, x)) = F$

4) $I(\forall x,\ \forall y\ P(y, x) \rightarrow P(f(x), f(y))) = V$ ssi $I_{x/1\ y/1}(\neg P(x, y) \vee P(f(x), f(y))) = V$ et $I_{x/1\ y/2}(\neg P(x, y) \vee P(f(x), f(y))) = V$ et $I_{x/2\ y/1}(\neg P(x, y) \vee P(f(x), f(y))) = V$ et $I_{x/2\ y/2}(\neg P(x, y) \vee P(f(x), f(y))) = V$.

   Or, $I_{x/1\ y/1}(\neg P(x, y) \vee P(f(x), f(y))) = I_c(P(1, 1) \vee P(f(1), f(1))) = F$
   donc $I(\forall x,\ \forall y\ P(y, x) \rightarrow P(f(x), f(y))) = F$

Exercice 4 **:**

1) Représenter en logique des prédicats les énoncés H1, H2, H3, H4, H5, C.

   H1 : Pour tout crime, il y a quelqu'un qui l'a commis.
   $\forall x\, (crime(x) \rightarrow \exists y\, commis(y, x))$

   H2 : Seuls les gens malhonnêtes commettent des crimes.
   $\forall y\, \forall x\, (crime(x) \wedge commis(y, x) \rightarrow malhonnete(y))$

   H3 : Ne sont arrêtés que des gens malhonnêtes.
   $\forall y\, (arrete(y) \rightarrow malhonnete(y))$

   H4 : Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes.
   $\forall y\, (malhonnete(y) \wedge arrete(y)) \rightarrow \exists x\, (crime(x) \wedge commis(y, x))$

   H5 : Il y a des crimes.
   $\exists x\, crime(x)$

   C : Il y a des gens malhonnêtes non arrêtés.
   $\exists y\, (malhonnete(y) \wedge \neg arrete(y))$

2) Donner les formes de Skolem correspondant aux énoncés H1, H2, H3, H4, H5.

H1 : $\neg crime(x) \vee commis(f(x), x)$

H2 : $\neg crime(x) \vee \neg commis(y, x) \vee malhonnete(y)$

H3 : $\neg arrete(y) \vee malhonnete(y)$

H4 : $\neg malhonnete(y) \vee \neg arrete(y) \vee \neg crime(x) \vee \neg commis(y, x)$

H5 : $crime(a)$

3) A-t-on $\{H1,\ H2,\ H3,\ H4,\ H5\} \models C$? Utiliser la résolution.
$\{H1,\ H2,\ H3,\ H4,\ H5\} \models C$ ssi $\{H1,\ H2,\ H3,\ H4,\ H5\} \cup \{\neg C\}$ incohérent

6) : $\neg C$: $\neg(\exists y\, malhonnete(y) \wedge \neg arrete(y)) =$
$\forall y\, \neg malhonnete(y) \vee arrete(y)$
skolémisation : clause prédicative (6) $\neg malhonnete(y) \vee arrete(y)$

$(H1)$ et $(H5)$ avec $\sigma(x) = a$: résolvante (7) $commis(f(a), a)$
(7) et $(H2)$ avec $\sigma(x) = a$ et $\sigma(y) = f(a)$:
résolvante (8) $\neg crime(a) \vee malhonnete(f(a))$
(8) et (5) : résolvante (9) $malhonnete(f(a))$
(7) et (4) avec $\sigma(x) = a$ et $\sigma(y) = f(a)$:
résolvante (10) $\neg malhonnete(f(a)) \vee \neg arrete(f(a)) \vee \neg crime(a)$
(10) et (5) : résolvante (11) $\neg malhonnete(f(a)) \vee \neg arrete(f(a))$
(11) et (9) : résolvante (12) $\neg arrete(a)$
(12) et (6) : résolvante (13) $\neg malhonnete(f(a))$
(13) et (9) : résolvante (14) $\square$: clause vide
donc $\{H1,\ H2,\ H3,\ H4,\ H5\} \cup \{\neg C\}$ est incohérent, donc $\{H1,\ H2,\ H3,\ H4,\ H5\} \models C$.

Exercice 5 **:**

Soit l'ensemble de formules $\mathcal{F} = \{\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \forall x(q(x) \rightarrow r(x)),\}$ et la formule $F = \forall x(p(x) \rightarrow r(x))$. Est-ce que $\{\mathcal{F}\} \models \mathcal{F}$? Utiliser la résolution.

$\{\mathcal{F}\} \models \mathcal{F}$ ssi $\{\mathcal{F}\} \cup \{\neg \mathcal{F}\}$ incohérent Skolémisation :
1) : $\neg p(x) \vee q(x)$
2) : $\neg q(x) \vee r(x)$
$\neg F$: $p(a) \wedge \neg r(a)$
4 clauses
1) : $\neg p(x) \vee q(x)$

2) : $\neg q(x) \vee r(x)$
3) : $p(a)$
4) : $\neg r(a)$
1) et 3) avec $\sigma(x) = a$ réslovante 5) : $q(a)$
2) et 4) avec $\sigma(x) = a$ réslovante 6) : $\neg q(a)$
5) et 6) réslovante 7) : $\square$: clause vide
donc $\{\mathcal{F}\} \cup \{\neg\mathcal{F}\}$ incohérent et $\{\mathcal{F}\} \models \mathcal{F}$.

Exercice 6 **:**
Soit les énoncés suivants :

F1 : $\forall x \forall y \forall z (F(x, y) \wedge F(y, z)) \rightarrow G(x, z))$

F2 : $\forall x \exists y F(y, x)$

F3 : $\neg \forall x \exists y G(y, x)$

L'ensemble $\{F1, F2, F3\}$ est-il cohérent ? Utiliser la méthode de résolution.

R'esultat de la skolémisation :

F1 : $\neg F(x, y) \vee \neg F(y, z) \vee G(x, z)$
on renomme x en x'

F2 : $F(f(x'), x')$
on renomme y en y'

F3 : $\neg G(y', a)$

Résolution
F1 et F3 avec $\sigma(z) = a$ et $\sigma(x) = y'$ résolvante (4) : $\neg F(y', y) \vee \neg F(y, a)$
F2 et (4) avec $\sigma(x') = a$ et $\sigma(y) = f(x')$ résolvante (5) : $\neg F(y', f(a))$
F2 et (5) avec $\sigma(x') = f(a)$ et $\sigma(y') = f(x')$ résolvante (6) : $\square$: clause vide
L'ensemble $\{F1, F2, F3\}$ est incohérent