

Logique classique

Cours 1 : Introduction

Odile PAPINI

POLYTECH

Université d'Aix-Marseille

odile.papini@univ-amu.fr

<http://odile.papini.perso.luminy.univ-amu.fr/sources/LOG.html>

Plan du cours

- 1 Pourquoi un cours de logique ?
- 2 Quelques exemples
- 3 Quelques repères historiques
- 4 Déroulement du cours
- 5 Bibliographie

Intoduction

- Qu'est ce qu'une logique ?
- Représenter et raisonner
- Différentes logiques
- Pourquoi un cours de logique ?
- Quelques exemples où la logique est nécessaire

Représentation d'énigmes

Les témoins (Berloquin) : quel est le signalement de l'agresseur ?

A l'issue d'un hold-up, quatre employés d'une banque décrivent le signalement de l'agresseur :

- Selon l'hôtesse, il avait les yeux bleus, était de grande taille et portait une veste et un chapeau.
- Selon le caissier, il avait les yeux noirs, était de petite taille et portait une veste et un chapeau.
- Selon la secrétaire, il avait les yeux verts, était de taille moyenne et portait un imperméable et un chapeau.
- Selon le directeur, il avait les yeux gris, était de grande taille et portait une veste et était nu tête.

Chaque témoin a décrit correctement un seul détail sur quatre. Par ailleurs, pour chaque détail, un témoin au moins l'a décrit correctement.

Représentation d'énigmes

Enigme d'Einstein

- Il y a cinq maisons de 5 couleurs différentes.
- Dans chaque maison vit une personne de nationalité différente.
- Chacun des 5 propriétaires boit un certain type de boisson, fume un certain type de cigares et garde un certain animal domestique.

Question

Qui a le poisson ?

E

- L'Anglais vit dans une maison rouge.
- Le Suédois a des chiens comme animaux domestiques.
- Le Danois boit du thé.
- La maison verte est à gauche de la maison blanche.
- Le propriétaire de la maison verte boit du café.
- La personne qui fume des Pall Mall a des oiseaux.
- Le propriétaire de la maison jaune fume des Dunhill.
- La personne qui vit dans la maison du centre boit du lait.
- Le Norvégien habite la première maison.
- L'homme qui fume les Blend vit à côté de celui qui a des chats.
- L'homme qui a un cheval est le voisin de celui qui fume des Dunhill.
- Le propriétaire qui fume des Blue Master boit de la bière.
- L'Allemand fume des Prince.
- Le Norvégien vit juste à côté de la maison bleue.
- L'homme qui fume des Blend a un voisin qui boit de l'eau.

Algorithmique

Ecriture d'algorithmes

- booléens
- expressions booléennes
- conjonctions : ... **et** ..., disjonctions : ... **ou** ...
- négation d'expressions booléennes complexes
- expressions conditionnelles : **si** ... **alors** ... **sinon** ...

Logique et algorithmique (source : C. Darmangeat)

Cours d'Algorithmique - Christophe Darmangeat - Iceweasel


Fichier Édition Affichage Historique Marque-pages Outils Aide

http://www.pise.info/algo/logique.htm

Les plus visités http://piccard.esil.u... Getting Started Latest Headlines Documentation/Ai... Imprimantes - CUP...

Mon premier livre : 464 pages à propos des sociétés primitives, des sociétés préhistoriques, de la famille, des rapports entre les sexes et de bien d'autres choses encore. On est certes fort loin de l'informatique, mais avouez que ça n'est pas toujours plus mal.
Prix public : 20 €.
Disponible (entre autres) à la [FNAC](#).
Critiques, réactions et discussions liées à l'ouvrage [sur mon blog](#).

Ne manquez pas mon groupe de country-rock, les incroyables [Moonlight Swampers](#) !



Vous aimez les petites bêtes qui vivent sous l'eau ?

Spontanément, on pense souvent que ET et OU s'excluent mutuellement, au sens où un problème donné s'exprime soit avec un ET, soit avec un OU. Pourtant, ce n'est pas si évident.

Quand faut-il ouvrir la fenêtre de la salle ? Uniquement si les conditions l'imposent, à savoir :

Si il fait trop chaud **ET** il ne pleut pas **Alors**
Ouvrir la fenêtre
Sinon
Fermer la fenêtre
Finsi

Cette petite règle pourrait tout aussi bien être formulée comme suit :

Si il ne fait pas trop chaud **OU** il pleut **Alors**
Fermer la fenêtre
Sinon
Ouvrir la fenêtre
Finsi

Ces deux formulations sont strictement équivalentes. Ce qui nous amène à la conclusion suivante :

Toute structure de test requérant une condition composée faisant intervenir l'opérateur ET peut être exprimée de manière équivalente avec un opérateur OU, et réciproquement.

Complexité algorithmique

Informatique théorique

Le problème SAT

Etant donnée une formule booléenne mise sous forme normale conjonctive, existe t-il une affectation de valeurs (0 ou 1) des variables booléennes rendant la formule vraie ?

SAT est un problème NP-Complet de référence [Cook 1971]

Complexité algorithmique

Réduction au problème SAT

Pour montrer qu'un problème est NP-complet on le transforme en un problème SAT

exemple : Optimisation Linéaire en Nombre Entier (OLNE)

problème OLNE

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 + (1 - x_2) \geq 1$$

$$(1 - x_1) + (1 - x_2) \geq 1$$

Complexité algorithmique

Réduction au problème SAT

Pour montrer qu'un problème est NP-complet on le transforme en problème SAT

problème OLNE

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 + (1 - x_2) \geq 1$$

$$(1 - x_1) + (1 - x_2) \geq 1$$

représentation

x_i tq $0 \leq x_i \leq 1$: variable v_i

pour chaque équation :

$$x_1 + \dots + x_k + (1 - x_{k+1}) + \dots + (1 - x_n) \geq 1$$

associer la formule :

$$v_1 \vee \dots \vee \neg v_{k+1} \vee \dots \vee \neg v_n$$

Complexité algorithmique

Réduction au problème SAT

problème OLNE

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 + (1 - x_2) \geq 1$$

$$(1 - x_1) + (1 - x_2) \geq 1$$

représentation

variables : v_1, v_2

$$F = (v_1 \vee v_2) \wedge (v_1 \vee \neg v_2) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2)$$

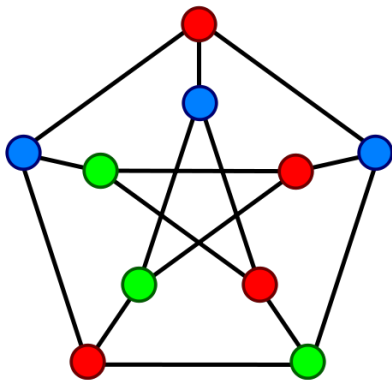
F est satisfaisable

solution problème OLNE :

$$x_i = 0 \text{ si } v_i = \textit{Faux},$$

$$x_i = 1 \text{ si } v_i = \textit{Vrai}$$

Problème coloration de graphe

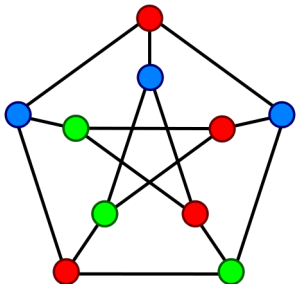


Graphe (de Petersen)

Coloration de graphe

attribuer une couleur à chacun de ses sommets t. q. deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes

Problème coloration de graphe



Graphe (de Petersen)

représentation

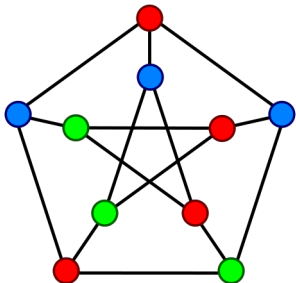
10 sommets : S_1, \dots, S_{10} , 3 couleurs : *Rouge*, *Bleu*, *Vert*

$S_{i,R}$ Vrai si S_i est de couleur Rouge, $1 \leq i \leq 10$

$S_{i,B}$ Vrai si S_i est de couleur Bleu, $1 \leq i \leq 10$

$S_{i,V}$ Vrai si S_i est de couleur Vert, $1 \leq i \leq 10$

Problème coloration de graphe



Graphe (de Petersen)

représentation

chaque sommet a au moins
une couleur :

$$S_{i,R} \vee S_{i,B} \vee S_{i,V}$$

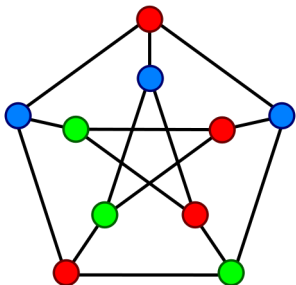
chaque sommet a au plus
une couleur :

$$S_{i,R} \rightarrow (\neg S_{i,B} \wedge \neg S_{i,V})$$

$$S_{i,B} \rightarrow (\neg S_{i,R} \wedge \neg S_{i,V})$$

$$S_{i,V} \rightarrow (\neg S_{i,R} \wedge \neg S_{i,B})$$

Problème coloration de graphe



Graphe (de Petersen)

représentation

les sommets voisins ont des couleurs différentes
pour tout couple de sommets voisins (S_i, S_j) :

$$S_{i,R} \rightarrow \neg S_{j,R}$$

$$S_{i,B} \rightarrow \neg S_{j,B}$$

$$S_{i,V} \rightarrow \neg S_{j,V}$$

Problème coloration de graphe



carte d'Europe

théorème des 4 couleurs

attribuer une couleur à
chaque pays t. q.

deux pays frontaliers soient
de couleurs différentes

conjecture : F. Guthrie 1852

preuve : K. Appel et W.
Haken 1976

Modélisation de programmes (source : J. Henry)

The screenshot shows a web browser window with the address bar containing the URL http://enswiki.ensimag.fr/images/1/1a/TER0910_soutenance_HenryJulien.pdf. The browser's menu bar includes 'Fichier', 'Édition', 'Affichage', 'Historique', 'Marque-pages', 'Outils', and 'Aide'. The page content is a PDF document titled 'Analyse par SMT-Solving' with a table of contents on the left side listing: 'SMT-Solving', 'Contribution', 'Modélisation du programme', 'Création de la formule logique', and 'Résultats'. The main content area displays the following text:

SMT-Solving Contribution Modélisation du programme Création de la formule logique Résultats

Analyse par SMT-Solving

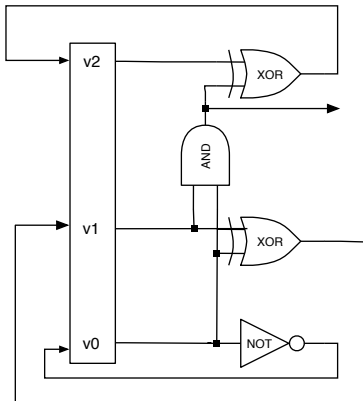
- Modélisation programme par une formule logique du premier ordre sans quantificateurs

$$\begin{array}{ll} \text{assume}(a > 0); & (a > 0) \\ y = x + a; & \Leftrightarrow \wedge (y = x + a) \\ z = a + y; & \wedge (z = a + y) \\ \text{check}(z > x + 1); & \wedge (z \leq x + 1) \end{array}$$

- Recherche d'une affectation des variables satisfaisant la formule
- Appel à un SMT-Solveur sur cette formule
- *unsat* \Rightarrow programme correct

Verimias Grenoble ensimag

Représentation de circuits (source : N. Baudru)



Compteur modulo 8

Circuit synchrone

- toutes les transitions s'effectuent en même temps
- l'état prochain de chaque registre peut donc être calculé en fonction de l'état courant des registres.

Modélisation d'un circuit synchrone (source : N. Baudru)

- L'ensemble des variables est constitué des sorties des registres plus les entrées primaires : $V = \{v_0, v_1, v_2\}$. Soit $V' = \{v'_0, v'_1, v'_2\}$ la copie de V .
- L'état initial est $\mathcal{S}_0 \equiv \neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2$
- Pour les transitions, on décrit quelles prochaines valeurs peuvent prendre les registres en fonction de leur valeur courante :
 - $\mathcal{R}_0 \equiv v'_0 \iff \neg v_0$
 - $\mathcal{R}_1 \equiv v'_1 \iff v_0 \oplus v_1$
 - $\mathcal{R}_2 \equiv v'_2 \iff (v_0 \wedge v_1) \oplus v_2$

Puisque tous ces changements se produisent en même temps (circuit synchrone) il faut combiner ces contraintes pour obtenir la relation finale : $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_0 \wedge \mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2$

Quelques repères historiques (en occident)

une brève retrospective

AC IV ième Antiquité	Fondements : les propositions Aristote, les Stoïciens
XIII – XIV ième Moyen-âge	Logique scholastique : dialectique R. Lulle, G. d'Occam
XV – XIX ième	apports de Leibniz, Euler
XIX ième	Mathématisation de la logique G. Boole, de Morgan, Frege
XXième	Logique contemporaine B. Russell, K. Gödel

Logiques contemporaines

Logiques classiques

- logique propositionnelle
- logique des prédicats

Logiques non classiques

- logiques **modales**
 - connecteurs supplémentaires : *modalités*
représenter le temps, l'espace, les permissions, les obligations, les interdictions ...
- logiques **multivaluées**
 - autres valeurs de vérité que *Vrai* et *Faux* :
Indéterminé, Probable, Plausible, ...

Déroulement





- COURS : 12 h Odile Papini
- TD : 8 h Odile Papini
- TP : 10 h Motasem Nawaf et Odile Papini

<http://odile.papini.perso.luminy.univ-amu.fr/sources/LOG.html>



Plan du cours

- Introduction
- Logique propositionnelle
- Raisonnement en logique propositionnelle
- Logique des prédicats
- Raisonnement en logique des prédicats
- Introduction à la programmation logique (PROLOG)

Bibliographie 1 I

-  DELAHAYE J. P., *Outils logiques pour l'intelligence artificielle*, _
-  GOCHET P.& GRIBOMONT P., *Logique : méthodes pour l'informatique fondamentale*,
Langue, Raisonnement, Calcul, Hermes, Paris, 1990.
-  KLEENE S. C., *Logique mathématique*,
Epistémologie, Jacques Gabay, Paris, 1987.
-  THAYSE A.& AL., *Approche logique de l'intelligence artificielle, Tome 1.*,
Informatique, DUNOD, Paris, 1990.

Bibliographie 1 II

-  ALLIOT J.-M., SCHEIX T., BRISSET P. & GARCIA F.,
Intelligence artificielle et Informatique théorique,
CEPADUES EDITIONS, Toulouse, 2002.
-  GIANNESINI F., KANOUI H., PASERO. R., VAN CANEGHEM
M., *PROLOG*,
Inter-ditions. 1985.

Bibliographie 2 I



Support de cours logique propositionnelle

<http://www.irit.fr/Andreas.Herzig/C/prop.html>

[http://www.grappa.univ-](http://www.grappa.univ-lille3.fr/champavere/Enseignement/0607/l2miashs/ia/logique.pdf)

[lille3.fr/champavere/Enseignement/0607/l2miashs/ia/logique.pdf](http://www.grappa.univ-lille3.fr/champavere/Enseignement/0607/l2miashs/ia/logique.pdf)

<http://www-lipn.univ-paris13.fr/levy/pdf/CoursLogMod.pdf>

Exercices

<http://home.etu.unige.ch/guigong3/TPdeLogique.html>

<http://users.info.unicaen.fr/zanutti/logique/>

http://liris.cnrs.fr/amille/enseignements/emiage/supports-IA/logique/logique_propositions.pdf

Bibliographie 3 I



Support de cours logique des prédicats

<http://www.irit.fr/Andreas.Herzig/C/pred.html>

<http://www.grappa.univ-lille3.fr/champavere/Enseignement/0607/l2miashs/ia/logique.pdf>

<http://www-lipn.univ-paris13.fr/levy/pdf/CoursLogMod.pdf>

Exercices

http://julien.dutant.free.fr/ph203A_2004/ph203A_LPM_Exercices_corriges.pdf

http://liris.cnrs.fr/amille/enseignements/emiage/supports-IA/logique/predicats_representation_connaissances.pdf