Logique classique

Cours 4 : Logique des prédicats

Odile PAPINI

POLYTECH
Université d'Aix-Marseille
odile.papini@univ-amu.fr
http://odile.papini.perso.luminy.univ-am.fr/sources/LOG.html

Plan du cours

Limites du langage propositionnel

Exemple de raisonnement

Tout homme est mortel,

Socrate est un homme,

donc Socrate est mortel.

en logique propositionnelle

p : “Tout homme est mortel”,

q : “Socrate est un homme”,

r : “donc Socrate est mortel”.

$$p \wedge q \rightarrow r$$

Intodution

nouvelle représentation

"**Pour tout x**, si **x est un homme** alors **x est mortel**",

"Socrate est un homme",

"donc Socrate est mortel".

x est un homme est représenté par **H(x)**

x est mortel est représenté par **M(x)**

en logique des prédicats

$$\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x))\ \wedge\ H(Socrate) \rightarrow M(Socrate)$$

Le langage de la logique des prédicats : $\mathcal{L}_{Pr}$

Vocabulaire

- un ensemble infini dénombrable de symboles de **prédicats**
- un ensemble infini dénombrable de symboles **fonctionnels**
- un ensemble infini dénombrable de **variables**
- les connecteurs : $\neg, \quad , \wedge, \quad \vee, \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow$
- les **quantificateurs** $\forall, \quad \exists$
- les parenthèses

Le langage de la logique des prédicats $\mathcal{L}_{Pr}$: Définitions

terme

- x une variable , f un symbole fonctionnel est un terme
- si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes alors $f(t_1, \cdots, t_n)$ est un terme

atome

- si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes et P est un prédicat alors $P(t_1, \cdots, t_n)$ est un atome

formule

- un atome est une formule
- si A et B sont des formules alors $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ sont des formules
- si A est une formule et x une variable alors $\forall x \quad A$, $\exists x \quad A$ sont des formules

Le langage de la logique des prédicats $\mathcal{L}_{Pr}$

prédicat

fonction propositionnelle qui conduit à une proposition lorsque les variables sont instanciées

$P(x_1, \cdots, x_n)$ où $x_1, \cdots, x_n$: n variables indépendantes

$n = 0$ proposition, $n = 1$ propriété : $premier(x)$

$n = 2$ relation binaire : $inferieur(x, y)$ $\cdots$

fonction

fonction qui conduit à une constante lorsque les variables sont instanciées

$f(x_1, \cdots, x_n)$ où $x_1, \cdots, x_n$: n variables indépendantes

$n = 0$ constante, $n = 1$: $f(x) = successeur(x)$, $f(x) = x^2$

$n = 2$: $f(x, y) = x + y$ $\cdots$

Le langage de la logique des prédicats $\mathcal{L}_{Pr}$

Portée des quantificateurs

atome ou formule à laquelle la quantification s'applique

variables liées

variables sous la portée de quantificateurs

ensemble des variables liées

si A est une formule,
l'ensemble **Varlie(A)** des variables liées de A est défini par :

- si A est un atome alors $\textbf{Varlie}(A) = \emptyset$
- si A est de la forme $B \to C$ alors $\textbf{Varlie}(A) = \textbf{Varlie}(B) \cup \textbf{Varlie}(C)$
- si A est de la forme $\neg B$ alors $\textbf{Varlie}(A) = \textbf{Varlie}(B)$
- si A est de la forme $\forall x\ B$ ou $\exists x\ B$ alors $\textbf{Varlie}(A) = \textbf{Varlie}(B) \cup \{x\}$

Le langage de la logique des prédicats $\mathcal{L}_{Pr}$

variables libres

variables qui ne sont pas sous la portée de quantificateurs

ensemble des variables libres

si A est une formule,
l'ensemble **Varlib**(A) des variables libres de A est défini par :

- si A est un atome alors **Varlib**(A) = **Var**(A)
- si A est de la forme $B \rightarrow C$ alors **Varlib**(A) = **Varlib**$(B) \cup$ **Varlib**(C)
- si A est de la forme $\neg B$ alors **Varlib**(A) = **Varlib**(B)
- si A est de la forme $\forall x\ B$ ou $\exists x\ B$ alors **Varlib**(A) = **Varlib**(B) - $\{x\}$

formule close ou fermée

une formule sans variable libre

Le langage de la logique des prédicats $\mathcal{L}_{Pr}$

Exemples

$A = (p(f(x, y)) \vee \forall z\, r(a, z))$

Var(A) ? Varlie(A) ? Varlib(A) ?

$B = (\forall x\, p(x, y, z) \vee \forall z\, (p(z) \rightarrow r(z)))$

Var(B) ? Varlie(B) ? Varlib(B) ?

$C = \forall x\, \exists y\, (p(x, y) \rightarrow \forall z\, r(x, y, z))$

Var(C) ? Varlie(C) ? Varlib(C) ?

Le langage de la logique des prédicats $\mathcal{L}_{Pr}$

Exercices

Parmi les formules suivantes lesquelles sont des formules closes ?

$$\forall i\, (pluie(i) \wedge \neg sortir(i))$$

$$\exists i\, (\neg pluie(i) \wedge (\forall i\, (different(i,j) \rightarrow pluie(j))))$$

$$\forall x\, P(x,y) \wedge \forall y\, Q(y)$$

Représentation d'énonçés en logique des prédicats

exercice

Représentation en logique des prédicats des énonçés suivants :

Quelqu'un arrive

Personne n'est venu

Quelques champignons sont comestibles

Tous les petits oiseaux volent

Tous les enfants aiment les bonbons

Aucun enfant ne déteste les bonbons

Tout ce qui brille n'est pas en or

ni les chats, ni les chiens ne sont tolérés

chats et chiens doivent avoir une autorisation

système formel

Axiomes

$\forall A,\ B,\ C,\ D \in \mathcal{L}_{Pr}$, x une variable et t un terme, D n'ayant pas x pour variable libre

A1) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

A2) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

A3) $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A))$

A4) $(\forall x\, A(x) \rightarrow A(t))$

A5) $((D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow \forall x\, B)$

système formel

Règles de déduction

$\forall A,\ B, \in \mathcal{L}_{Pr}$

- **modus ponens**

$$\frac{\vdash A, \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$$

- **règle de substitution**

- **généralisation**

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x\ A}$$

système formel

règle de substitution

soit $A(x)$ une formule contenant x comme **variable libre**
soit t un terme

$A(t)$: obtenue en **remplaçant les occurences libres** de x par t dans $A(x)$

Si x ou t apparaissent comme variables liées dans la formule $A(x)$ alors renommer ces occurences

système formel

Déduction

Soit B une formule de $\mathcal{L}_{Pr}$ et $H_1, \cdots, H_m$ **des hypothèses**
une **déduction** de B à partir d'hypothèses $H_1, H_2, \cdots, H_m$

$$H_1, \cdots, H_m \vdash B$$

est une suite de formules $F_1, \cdots, F_i, F_n$ telle que :

$F_n = B$

et F_i, $1 \leq i < n$ est :

- soit une des hypothèses $H_1, \cdots, H_m$
- soit un axiome
- soit obtenue par l'application de règles de déduction à partir de formules F_j, $j < i$

système formel

Proposition :

$$\forall A \in \mathcal{L}_{Pr} \quad \vdash (A \rightarrow A)$$

Proposition :

$\forall A_1, \cdots, A_{n-1} \in \mathcal{L}_{Pr}$

$$\text{si} \quad A_1, \cdots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B) \quad \text{alors} \quad A_1, \cdots, A_n \vdash B$$

Théorème de déduction :

Soient $A_1, \cdots, A_n$ des formules closes de $\mathcal{L}_{Pr}$

$$\text{si} \quad A_1, \cdots, A_n \vdash B \quad \text{alors} \quad A_1, \cdots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$$

système formel

exercices : déduction

- Montrer que $\forall x \, \forall y \; p(x, y) \; \vdash \; \forall z \; p(z, z)$

sémantique de la logique des prédicats

Interprétation

$I = (D, I_c, I_v)$ où

- D ensemble non vide, domaine d'interprétation
- I_c la fonction :

$$\begin{array}{ccc} D^n & \rightarrow & D \\ f & \rightarrow & I_c(f) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D^m & \rightarrow & \{0,1\} \\ P & \rightarrow & I_c(P) \end{array}$$

- I_v la fonction :

$$\begin{array}{ccc} Var & \rightarrow & D \\ x & \rightarrow & I_v(x) \end{array}$$

sémantique de la logique des prédicats

Interprétation d'une formule de la logique des prédicats

A une formule de $\mathcal{L}_{Pr}$, association d'une valeur de vérité $I(A)$ à A

- si x est une variable libre alors $I(x) = I_v(x)$
- $I(f(t_1, \cdots, t_n)) = (I_c(f))(I(t_1), \cdots, I(t_n))$
- $I(P(t_1, \cdots, t_m)) = (I_c(P))(I(t_1), \cdots, I(t_m))$
- si A et B sont des formules alors $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ s'interprètent comme dans la logique propositionnel
- si A est une formule et x une variable alors $I(\forall x\ A) = 1$ si $I_{x/d}(A) = 1$ pour tout élément $d \in D$
- si A est une formule et x une variable alors $I(\exists x\ A) = 1$ si $I_{x/d}(A) = 1$ pour au moins un élément $d \in D$

sémantique de la logique des prédicats

exercice :

Exprimer en français les formules suivantes

F1 : $Masculin(Jean)$

F2 : $Feminin(Marie)$

F3 : $Masculin(Pierre)$

F4 : $Frere(Jean, Marie)$

F5 : $\forall x\ (Feminin(x) \rightarrow (Masculin(x) \rightarrow \perp))$

F6 : $\forall x\ (\forall y\ (Frere(x, y) \rightarrow Masculin(x)))$

F7 : $\forall x\ (Frere(x, x) \rightarrow \perp)$

sémantique de la logique des prédicats

exercice :

F1 : $Masculin(Jean)$ F2 : $Feminin(Marie)$

F3 : $Masculin(Pierre)$ F4 : $Frere(Jean, Marie)$

F5 : $\forall x\ (Feminin(x) \rightarrow (Masculin(x) \rightarrow \perp))$

F6 : $\forall x\ (\forall y\ (Frere(x, y) \rightarrow Masculin(x)))$

F7 : $\forall x\ (Frere(x, x) \rightarrow \perp)$

Soit $I = (D, I_c, I_v)$ avec $D = \{a, b, c\}$

$I_c(Jean) = a,\ I_c(Marie) = b,\ I_c(Pierre) = c$

$I_c(Masculin) = f_{Ma}$ tq si $x = b$ alors $f_{Ma}(x) = 0$ sinon $f_{Ma}(x) = 1$
$I_c(Feminin) = f_{Fe}$ tq si $x = b$ alors $f_{Fe}(x) = 1$ sinon $f_{Fe}(x) = 0$
$I_c(Frere) = f_{Fr}$ tq si $x = a$ et $y = b$ alors $f_{Fr}(x, y) = 1$ sinon $f_{Fr}(x, y) = 0$

$I(F1)$, $I(F2)$, $I(F3)$, $I(F4)$, $I(F5)$, $I(F6)$, $I(F7)$?

sémantique de la logique des prédicats

quelques définitions

$A \in \mathcal{L}_{Pr}$, $B \in \mathcal{L}_{Pr}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$,
$\mathcal{W}$: ensemble des interprétations

- A est une **tautologie**, $\models A$, si $\forall\, I \in \mathcal{W}$, $I(A) = 1$
- B est une **conséquence** de A si $\forall\, I \in \mathcal{W}$ tq $I(A) = 1$ alors $I(B) = 1$, on écrit $A \models B$
- B est une **conséquence** de $\mathcal{F}$ si $\forall\, I \in \mathcal{W}$ tq $\forall A \in \mathcal{F}$, $I(A) = 1$ alors $I(B) = 1$, on écrit $\mathcal{F} \models B$
- A est **satisfaisable** si $\exists\, I \in \mathcal{W}$ tq $I(A) = 1$
- $\mathcal{F}$ est **satisfaisable** si $\exists\, I \in \mathcal{W}$ tq $\forall A \in \mathcal{F}$, $I(A) = 1$
- A est **insatisfaisable** ou **incohérente** si $\forall\, I \in \mathcal{W}$, $I(A) = 0$
- $\mathcal{F}$ est **insatisfaisable** si $\forall I \in \mathcal{W}$, $\exists A \in \mathcal{F}$ tq $I(A) = 0$

sémantique de la logique des prédicats

exercice :

Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats

A : Toutes les voitures ont exactement un propriétaire

B : Certains étudiants ont une voiture

C : Certains étudiants n'ont pas de voiture

Soit $I = (D, I_c, I_v)$ avec $D = \{a,\ b\}$

$I_c(voiture) = f_v$ tq si $x = a$ alors $f_v(x) = 1$ sinon $f_v(x) = 0$
$I_c(etudiant) = f_e$ tq si $x = b$ alors $f_e(x) = 1$ sinon $f_e(x) = 0$
$I_c(possede) = f_p$ tq si $x = b$ et $y = a$ alors $f_p(x, y) = 1$ sinon $f_{Fr}(x, y) = 0$

I(A) ? I(B) ? I(C) ?

sémantique de la logique des prédicats

Quelques propriétés

- **proposition :** $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$ ensemble de formules closes, B formule close

$$\mathcal{F} \models B \text{ ssi } \mathcal{F} \cup \{\neg B\} \text{ est insatisfaisable}$$

$\forall\, A \in \mathcal{L}_{Pr}$

- **proposition :**

$$\forall x\, \forall y\, A \quad \equiv \quad \forall y\, \forall x\, A$$

$$\exists x\, \exists y\, A \quad \equiv \quad \exists y\, \exists x\, A$$

$$\exists x\, \forall y\, A \quad \models \quad \forall y\, \exists x\, A$$

sémantique de la logique des prédicats

Quelques propriétés

$\forall A,\ B \in \mathcal{L}_{Pr}$

- **proposition :**

$$\begin{array}{lcl}
(\forall x\ A \wedge \forall x\ B) & \equiv & \forall x\ (A \wedge B) \\
(\forall x\ A \vee \forall x\ B) & \models & \forall x\ (A \vee B) \\
\forall x\ (A \rightarrow B) & \models & (\forall x\ A \rightarrow \forall x\ B) \\
\forall x\ (A \leftrightarrow B) & \models & (\forall x\ A \leftrightarrow \forall x\ B)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\exists x\ (A \vee B) & \equiv & (\exists x\ A \vee \exists x\ B) \\
\exists x\ (A \wedge B) & \models & (\exists x\ A \wedge \exists x\ B) \\
\exists x\ (A \rightarrow B) & \equiv & (\exists x\ A \rightarrow \exists x\ B) \\
\forall x\ \neg A & \equiv & \neg \exists x\ A
\end{array}$$

la logique des prédicats

Quelques théorèmes

théorème (d'adéquation) :
$\forall A \in \mathcal{L}_{Pr}$ si $\vdash A$ alors $\models A$
(les formules qui sont des théorèmes sont des tautologies)

théorème (de complétude faible) :
$\forall A \in \mathcal{L}_{Pr}$ si $\models A$ alors $\vdash A$
(les formules qui sont des tautologies sont des théorèmes)

théorème (de complétude forte) :
Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$ et $B \in \mathcal{L}_{Pr}$, si $\mathcal{F} \models B$ alors $\mathcal{F} \vdash B$

la logique des prédicats

Quelques théorèmes

théorème (de compacité) : Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{Pr}$. Si toute famille finie $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ est satisfaisable alors $\mathcal{F}$ est aussi satisfaisable.

théorème (de finitude) : Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{Pr}$.
Soit $B \in \mathcal{L}_{Pr}$ si $\mathcal{F} \models B$ alors $\exists \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ fini tq $\mathcal{F}' \models B$

théorème : la logique des prédicats est semi-décidable
Il n'existe aucun programme qui pour une formule $A \in \mathcal{L}_{Pr}$ indique en un temps fini si A n'est pas une tautologie

la logique des prédicats

Quelques théorèmes

théorème : Toute théorie axiomatique égalitaire ayant :

- un nombre fini de symboles, un nombre fini de constantes
- un seul symbole fonctionnel unaire f
- un nombre fini de prédicats unaires et le prédicat binaire égalité
- n'ayant pas d'axiomes non logiques

est décidable

logique pour l'informatique : formes normales

formes prénexes

$$Q_1 \, x_1 \ \cdots \ Q_n \, x_n \, M$$

proposition : pour toute formule A il existe une forme prénexe équivalente à A

algorithme

- élimination des connecteurs d'implication et d'équivalence
- renommage des variables (plus de variable libre et liée en même temps)
- suppression des quantificateurs inutiles
- transfert du connecteur de négation immédiatement devant les atomes
- transfert des quantificateurs en tête des formules

logique pour l'informatique

exercice :

Donner la forme prénexe équivalente à la formule

$$\forall x\ (P(x) \land \forall y\ \exists x\ (\neg Q(x,y) \rightarrow\ \forall z\ R(a,x,y,z)))$$

logique pour l'informatique

extension du vocabulaire à la logique des prédicats

littéral : un atome ou la négation d'un atome

clause : disjonction de littéraux

cube : conjonction de littéraux

forme conjonctive normale : forme prénexe dont la matrice M est une conjonction de clauses

forme disjonctive normale : forme prénexe dont la matrice M est une disjonction de cubes

logique pour l'informatique : formes normales

formes de Skolem

proposition : S_A forme de skolem de A,
A est satisfaisable ssi S_A est satisfaisable

transformation de A en forme de Skolem S_A

- transformer A en forme prénexe : $Q_1\ x_1\ \cdots\ Q_n\ x_n\ M$
- transformer M en forme conjonctive normale M'
- skolémiser M' :
  1) associer à toute variable quantifiée existentiellement le terme constitué par un symbole fonctionnel ayant pour arguments la liste des variables quantifiées universellement qui précèdent la variable
  2) remplacer chaque occurence de variable quantifiée existentiellement par le terme défini en 1)
  3) supprimer les quantificateurs existentiels

logique pour l'informatique

exercice :

Donner la forme de SKolem équivalente à la formule

$$\forall x\ (P(x) \wedge \forall y\ \exists x\ (\neg Q(x,y) \rightarrow\ \forall z\ R(a,x,y,z)))$$

logique pour l'informatique : formes normales

théorème de Herbrand

on associe à une formule conjonctive normale F l'ensemble C des clauses correspondantes

univers de Herbrand associé à un ensemble de clauses C : ensemble de tous les termes sans variable construit à partir du vocabulaire de C

système de Herbrand SH_C associé à C : ensemble des clauses obtenues à partir de C en remplaçant les variables par des éléments de l'univers de Herbrand

théorème de Herbrand :
C est satisfaisable ssi SH_C est satisfaisable

logique pour l'informatique

exercice :

$H_1 = \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$
$H_2 = \forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))$
$C = \forall x\ (P(x) \rightarrow R(x))$

Est-ce que $\{H_1,\ H_2\} \models C$?

Mettre les formules sous forme prénexe
Mettre les formules sous forme de Skolem
Donner le système de Herbrand associé
Le système de Herbrand associé est-il satisfaisable ?