Annexe A

La logique propositionnelle

l'objet de cette annexe est un rappel rapide de la logique propositionnelle, pour plus de détails le lecteur pourra consulter les ouvrages suivants [THA 90], [DEL 86], [KLE 87], [GOC 90].

Dans la logique contemporaine on observe deux courants. L'un qui voit la logique comme un langage interprété, une théorie qui traite des aspects les plus abstraits de la réalité, comme par exemple, dans les travaux de Frege, de Russell, de Quine. L'autre voit la logique comme un calcul, comme par exemple dans les travaux de Boole, de Skolem, de Hintikka, cette conception permet de traiter les systèmes axiomatiques formalisés, non pas comme des formules vraies absolument, mais comme des collections de formules vraies relativement à un modèle, c'est à dire relativement à un choix de domaine pour les variables et d'interprétation pour les constantes.

La dissociation entre la notion de vérité mathématique "logique" et de théorème "logique" se fait par la distinction entre le langage objet et le métalangage, c'est à dire le langage d'observation. Le métalangage syntaxique ou axiomatique traite des popriétés et des relations des expressions et formules en faisant abstraction de leur signification. Le métalangage sémantique traite des popriétés et des relations des expressions qui reposent sur des rapports entre signifiant et signifié.

Chapitre rédigé par Odile Papini.

A.1. Le langage de la logique propositionnelle

Le langage propositionnel $\mathcal{L}$ est construit à partir d'un ensemble dénombrable de variables propositionnelles $\mathcal{P}$ (des lettres éventuellement indicées), des constantes 0 (Faux) et 1 (Vrai)[1] des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ et de parenthèses.

DÉFINITION A.1.– *L'ensemble des formules bien formées de $\mathcal{L}$ est le plus petit ensemble tel que :*

– 0 *et* 1 *sont des formules ;*

– *une variable propositionnelle (ou proposition) est une formule ;*

– *si P et Q sont des formules alors $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$ sont des formules.*

A.2. Aspect axiomatique de la logique propositionnelle

L'aspect axiomatique de la logique propositionnelle revient à définir un système formel dans lequel les déductions que l'on peut faire conduisent à des théorèmes.

La définition d'un système formel, nécessite le recours à des axiomes, c'est à dire des propositions évidentes par elles-mêmes qui ne nécessitent aucune démonstration. Plusieurs choix d'ensembles d'axiomes sont possibles, parmi les plus célèbres, Whitehead et Russell ont proposé un système de 5 axiomes, Hilbert et Ackermann un système de 4 axiomes, Kleene et Gentsen un système de 13 axiomes. Pour des raisons de simplicité nous rappellerons le système de Lukasiewicz, datant des années 1930, n'utilisant que les connecteurs $\neg$ et $\rightarrow$ et basé sur les 3 axiomes suivants :

A1 : $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$;

A2 : $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$;

A3 : $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$.

Afin de pouvoir effectuer des déductions des règles sont définies. La règle de substitution permet de remplacer dans un théorème une variable propositionnelle, partout où elle figure, par une autre variable propositionnelle ou par une formule bien formée. Soit Γ et Δ des ensembles de formules de la logique propositionnelle, la règle de conclusion, souvent appelée règle de dérivation ou de modus ponens spécifie que si de Γ on peut déduire P et de Δ on peut déduire $P \rightarrow Q$ alors de Γ et Δ on peut déduire Q. On utilise le symbole d'assertion logique noté $\vdash$ qui n'est pas un nouvel opérateur mais un signe métalogique (du métalangage) pour noter la relation d'inférence ou de déduction :

$$\frac{\Gamma \vdash P,\ \Delta \vdash P \rightarrow Q}{\Gamma, \Delta \vdash Q}$$

1. Les constantes sont quelqefois notées $\perp$ pour Faux et $\top$ pour Vrai.

Les définitions sont des équivalences qui permettent de simplifier l'écriture des formules en n'utilisant que certains connecteurs, par exemple, dans les définitions ci-dessous, seuls les connecteurs $\neg$ et $\vee$ sont utilisés :

$D_1 : P \rightarrow Q =_{def} \neg P \vee Q$;

$D_2 : P \wedge Q =_{def} \neg(\neg P \vee \neg Q)$;

$D_3 : P \leftrightarrow Q =_{def} (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$.

Dans le système formel de Lukasiewicz, les seules règles d'inférence sont la substitution et le modus ponens et on peut définir la déduction formellement comme suit :

DÉFINITION A.2.– *Soit $H_1, H_2, \cdots, H_m \in \mathcal{L}$ et $F_1, F_2, \cdots, F_p \in \mathcal{L}$. Une déduction à partir d'hypothèses $H_1, H_2, \cdots, H_m$ est une suite de formules bien formées $F_1, F_2, \cdots, F_p$ où chaque F_i est soit :*

– une hypothèse

– un axiome

– ou une formule obtenue à partir des règles d'inférence (substitution ou modus ponens) appliquées aux formules placées avant F_i dans la déduction

On note $H_1, H_2, \cdots, H_m \vdash F_p$ une déduction de F_p à partir des hypothèses $H_1, H_2, \cdots, H_m$ et on note $\vdash F$ un théorème F, c'est à dire, une déduction de F sans hypothèse et on a les propriétés suivantes :

PROPOSITION A.1.– *$\forall P \in \mathcal{L}$, $\quad \vdash (P \rightarrow P)$.*

PROPOSITION A.2.– *$\forall P_1, \ldots, P_{n-1}, Q \in \mathcal{L}$, si $P_1, \ldots, P_{n-1} \vdash (P_n \rightarrow Q)$ alors $P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Q$.*

L'utilisation du théorème de déduction, ci-après, évite l'écriture d'une déduction complète de la formule considérée, ce qui serait beaucoup plus long.

THÉORÈME A.1.– *$\forall P_1, \ldots, P_{n-1}, Q \in \mathcal{L}$, si $P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Q$ alors $P_1, \ldots, P_{n-1} \vdash (P_n \rightarrow Q)$.*

De plus, on dispose des quelques théorèmes suivants qui s'avèrent utiles :

PROPOSITION A.3.– *$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}$, toutes les formules suivantes sont des théorèmes :*

$\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$;

$\vdash (P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q))$;

$\vdash (\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q))$;

$\vdash (\neg\neg P \rightarrow P)$;

$\vdash (P \rightarrow \neg\neg P)$;

$\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P))$;

$\vdash (P \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)))$;

$\vdash ((Q \rightarrow P) \rightarrow ((\neg Q \rightarrow P) \rightarrow P))$.

A.3. Aspect sémantique de la logique propositionnelle

L'aspect sémantique de la logique propositionnelle, appelé aussi théorie des modèles, est l'interprétation des formules de $\mathcal{L}$ et consiste en l'analyse des formules toujours vraies, appelées tautologies.

DÉFINITION A.3.– *On appelle interprétation, toute application σ de $\mathcal{P}$ dans $\{0, 1\}$ telle que $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(1) = 1$. L'application σ est étendue aux formules de la façon suivante : $\forall P, Q \in \mathcal{L}$,*

– $\sigma(\neg P) = 1 - \sigma(P)$;

– $\sigma(P \vee Q) = max(\sigma(P), \sigma(Q))$;

– $\sigma(P \wedge Q) = min(\sigma(P), \sigma(Q))$;

– $\sigma(P \rightarrow Q) = max((1 - \sigma(P)), \sigma(Q))$;

– $\sigma(P \leftrightarrow Q) = min(max((1 - \sigma(P)), \sigma(Q)), max(\sigma(P), (1 - \sigma(Q))))$.

Cela se représente souvent sous la forme d'une table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

$\forall P, Q \in \mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ un ensemble de formules de $\mathcal{L}$, et σ une interprétation, on dispose des définitions suivantes :

DÉFINITION A.4.– *On appelle tautologie (ou formule valide) toute formule P, telle que pour toute interprétation σ, $\sigma(P) = 1$, on la note $\models P$.*

DÉFINITION A.5.– *La formule Q est une conséquence logique ou conséquence valide de la formule P si $\sigma(P) = 1$ alors $\sigma(Q) = 1$, on écrit alors $P \models Q$.*

DÉFINITION A.6.– *La formule Q est une conséquence logique de l'ensemble de formules $\mathcal{A}$, si $\forall P \in \mathcal{A}$, $\sigma(P) = 1$ alors $\sigma(Q) = 1$, on écrit $\mathcal{A} \models Q$.*

DÉFINITION A.7.– *Les formules P et Q sont équivalentes si $P \models Q$ et $Q \models P$, on écrit alors $P \equiv Q$.*

DÉFINITION A.8.– *Une formule P est satisfaisable ou cohérente s'il existe une interprétation σ telle que $\sigma(P) = 1$. On appelle alors σ un modèle de P et on écrit alors $\sigma \models P$.*

DÉFINITION A.9.– *Un ensemble de formules $\mathcal{A}$ est satisfaisable ou cohérent si il existe une interprétation σ telle que $\forall P \in \mathcal{A}$, $\sigma(P) = 1$. On appelle alors σ un modèle de $\mathcal{A}$ et on écrit alors $\sigma \models \mathcal{A}$.*

DÉFINITION A.10.– *On dit que deux ensembles de formules sont équivalents, s'ils ont exactement les mêmes modèles.*

DÉFINITION A.11.– *Une formule P est insatisfaisable ou incohérente si pour toute interprétation σ, $\sigma(P) = 0$. On appelle σ contre-modèle de P. On montre facilement que P est insatisfaisable si $\neg P$ est une tautologie.*

DÉFINITION A.12.– *Un ensemble de formules $\mathcal{A}$ est insatisfaisable ou incohérent si pour toute interprétation σ, $\exists P \in \mathcal{A}$ tel que $\sigma(P) = 0$.Autrement dit, il n'existe aucun modèle de $\mathcal{A}$ et on appelle σ contre-modèle de $\mathcal{A}$.*

De plus on dispose des résultats suivants :

PROPOSITION A.4.– $\forall P, Q \in \mathcal{L}$,

– $\models (P \to Q)$ *ssi* $P \models Q$;
– $\models (P \leftrightarrow Q)$ *ssi* $P \equiv Q$;
– *si* $\models P$ *et* $\models (P \to Q)$ *alors* $\models Q$;
– $\models (P \wedge Q)$ *ssi* $\models P$ *et* $\models Q$;
– *si* $\models P$ *ou* $\models Q$ *alors* $\models (P \vee Q)$.

Les théorèmes suivants donnent les principales propriétés de la logique propositionnelle :

THÉORÈME A.2.– *(d'adéquation.)* $\forall P \in \mathcal{L}$, *si* $\vdash P$ *alors* $\models P$. *Autrement dit, tous les théorèmes sont des tautologies.*

THÉORÈME A.3.– *(de complétude.)* $\forall P \in \mathcal{L}$, *si* $\models P$ *alors* $\vdash P$. *Autrement dit, toutes les tautologies sont des théorèmes.*

THÉORÈME A.4.– *(de cohérence.)* $\forall P \in \mathcal{L}$, *il est impossible d'avoir à la fois* $\vdash P$ *et* $\vdash \neg P$.

THÉORÈME A.5.– *(de complétude généralisée.) Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules de $\mathcal{L}$, soit P une formule de $\mathcal{L}$, $\mathcal{A} \models P$ ssi $\mathcal{A} \vdash P$.*

THÉORÈME A.6.– *(de compacité.) Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules de $\mathcal{L}$, si pour toute famille finie $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, il existe une interprétation σ telle que $\forall P \in \mathcal{A}'$, $\sigma(P) = 1$ alors il existe une interprétation σ telle que $\forall P \in \mathcal{A}$, $\sigma(P) = 1$.*

THÉORÈME A.7.– *(de finitude.) Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules de $\mathcal{L}$, si $\mathcal{A} \models P$ alors il existe $\mathcal{A}'$ fini, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}' \models P$.*

THÉORÈME A.8.– *(de décidabilité.)* $\forall P \in \mathcal{L}$, *il existe un programme qui pour toute formule P, indique en un temps fini si oui ou non* $\vdash P$.

Il est souvent utile, d'un point de vue algorithmique, de transformer les formules propositionnelles en formules équivalentes ayant un caractère "canonique".

DÉFINITION A.13.– *On appelle littéral une proposition ou la négation d'une proposition.*

DÉFINITION A.14.– *On appelle clause une disjonction de littéraux.*

DÉFINITION A.15.– *On appelle cube une conjonction de littéraux.*

On appelle forme conjonctive normale ou CNF une conjonction de clauses et forme disjonctive normale ou DNF une disjonction de cubes et on a le résultat suivant :

THÉORÈME A.9.– *(de normalisation.)*

– *Toute formule propositionnelle admet une forme conjonctive normale qui lui est équivalente.*

– *Toute formule propositionnelle admet une forme disjonctive normale qui lui est équivalente.*

Annexe B

La logique des prédicats

L'objet de cette annexe est un rappel rapide de la logique des prédicats, pour plus de détails le lecteur pourra consulter les ouvrages suivants [THA 90], [DEL 86], [KLE 87], [GOC 90].

La logique propositionnelle est un formalisme logique intéressant, en particulier, du point de vue des applications informatiques, parce qu'elle est décidable, cependant sa puissance d'expression est limitée. La logique des prédicats ou logique du premier ordre est un formalisme logique mieux adapté à la représentation des connaissances, cependant il est semi-décidable. Tout comme dans le cas de la logique propositionnelle nous allons présenter brièvement, le langage, l'aspect syntaxique puis l'aspect sémantique de cette logique.

B.1. Le langage de la logique des prédicats : $\mathcal{L}_{Pr}$

Le langage de la logique des prédicats $\mathcal{L}_{Pr}$ est construit à partir d'un ensemble infini dénombrable de symboles de prédicats ou prédicats [1], d'un ensemble infini dénombrable de symboles fonctionnels [2], d'un ensemble infini dénombrable de variables, des connecteurs : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ et des quantificateurs universel $\forall$, et existentiel $\exists$.

La définition des formules de la logique des prédicats nécessite la définition de termes et d'atomes.

DÉFINITION.– *terme*

Chapitre rédigé par Odile Papini.

1. Les propositions sont des symboles de prédicats d'arité 0.

2. Les symboles constants sont des symboles fonctionnels d'arité 0.

– *x une variable est un terme ;*

– *f un symbole fonctionnel est un terme ;*

– *si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes alors $f(t_1, \cdots, t_n)$ est un terme.*

DÉFINITION.– *atome*

– *Si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes et P est un prédicat alors $P(t_1, \cdots, t_n)$ est un atome.*

DÉFINITION.– *formule*

– *un atome est une formule ;*

– *si A et B sont des formules alors $\neg\ A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ sont des formules ;*

– *si A est une formule et x une variable alors $\forall\ x\ A$, $\exists\ x\ A$ sont des formules.*

La présence de quantificateurs dans le langage du calcul des prédicats entraîne la définition de variables liées ou libres définies comme suit :

DÉFINITION.– *Si l'occurrence d'une variable est placée sous la portée d'un quantificateur* [3]*, cette occurrence est dite* liée*, sinon elle dite libre.*

L'ensemble des variables liées est défini par :

DÉFINITION.– *si A est une formule, l'ensemble Varlie(A) des variables liées de A est défini par :*

– *si A est un atome alors Varlie(A) = $\emptyset$;*

– *si A est de la forme $B \wedge C$ ou $B \vee C$ ou $B \rightarrow C$ ou $B \leftrightarrow C$ alors Varlie(A) = Varlie(B) $\cup$ Varlie(C) ;*

– *si A est de la forme $\neg\ B$ alors Varlie(A) = Varlie(B) ;*

– *si A est de la forme $\forall x\ B$ ou $\exists x\ B$ alors Varlie(A) = Varlie(B) $\cup$ $\{x\}$.*

L'ensemble des variables libres est défini par :

DÉFINITION.– *si A est une formule, Var(A) est l'ensemble des variables de A, l'ensemble Varlib(A) des variables libres de A est défini par :*

– *si A est un atome alors Varlib(A) = Var(A) ;*

– *si A est de la forme $B \wedge C$ ou $B \vee C$ ou $B \rightarrow C$ ou $B \leftrightarrow C$ alors Varlib(A) = Varlib(B) $\cup$ Varlib(C) ;*

– *si A est de la forme $\neg\ B$ alors Varlib(A) = Varlib(B) ;*

– *si A est de la forme $\forall x\ B$ ou $\exists x\ B$ alors Varlib(A) = Varlib(B) - $\{x\}$.*

DÉFINITION.– *Une formule A est dite close ou fermée si Varlib(A) = $\emptyset$.*

---

3. La portée d'un quantifi cateur, est l'atome ou formule à laquelle la quantifi cation s'applique.

B.2. Aspect axiolmatique de la logique des prédicats

L'aspect axiomatique de la logique des prédicats revient à définir un système formel dans lequel les déductions que l'on peut faire conduisent à des théorèmes. La définition d'un système formel, nécessite le recours à des axiomes, pour des raisons de simplicité nous utiliserons l'extension à la logique des prédicats du système de Lukasiewicz.

La règle de substitutions dans le cadre de la logique des prédicats opère comme suit. Soit $A(x)$ une formule contenant x comme variable libre et soit t un terme alors $A(t)$ est obtenue en remplaçant les occurences libres de x par t dans $A(x)$. Si x ou t apparaissent comme variables liées dans la formule $A(x)$ alors ces occurences sont renommées.

L'extension à la logique des prédicats du système de Lukasiewicz qui est basé sur les 5 axiomes suivants :

Soit A, B, C des formules de $\mathcal{L}_{Pr}$, x une variable et t un terme, D une formule n'ayant pas x pour variable libre

A1 : $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$;

A2 : $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$;

A3 : $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$;

A4 : $(\forall x\ A(x) \rightarrow A(t))$;

A5 : $((D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow \forall x\ B)$;

Soit Γ et Δ des ensembles de formules de la logique des prédicats. Les règles d'inférence de ce système formel sont la règle de substitution, la règle de déduction, ou modus ponens :

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

et règle de généralisation :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x\ A.}$$

et on peut définir la déduction formellement comme suit :

DÉFINITION B.1.– *déduction Soit* $H_1, H_2, \cdots, H_m \in \mathcal{L}_{Pr}$ *et* $F_1, F_2, \cdots, F_p \in \mathcal{L}_{Pr}$ *. Une déduction à partir d'hypothèses* $H_1, H_2, \cdots, H_m$ *est une suite de formules bien formées* $F_1, F_2, \cdots, F_p$ *où chaque* F_i *est soit :*

– une hypothèse

– un axiome

– ou une formule obtenue à partir des règles d'inférence (substitution, modus ponens ou généralisation) appliquées aux formules placées avant F_i *dans la déduction*

On note $H_1, H_2, \cdots, H_m \vdash F_p$ une déduction de F_p à partir des hypothèses $H_1, H_2, \cdots, H_m$ et on note $\vdash F$ un théorème F, c'est à dire, une déduction de F sans hypothèse et on a les propriétés suivantes :

PROPOSITION B.1.– $\forall A \in \mathcal{L}_{Pr} \quad \vdash (A \rightarrow A)$.

PROPOSITION B.2.– $\forall A_1, \cdots, A_{n-1} \in \mathcal{L}_{Pr} \times \cdots \times \mathcal{L}_{Pr}$ *si* $A_1, \cdots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$ *alors* $A_1, \cdots, A_n \vdash B$.

THÉORÈME B.1.– *(de déduction). Soient $A_1, \cdots, A_n$ des formules closes de $\mathcal{L}_{Pr}$, si $A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n \vdash B$ alors $A_1, \cdots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$.*

B.3. Aspect sémantique de la logique des prédicats

L'aspect sémantique de la logique des prédicats est l'interprétation des formules de $\mathcal{L}_{Pr}$.

DÉFINITION B.2.– *On appelle interprétation le triplet $I = (D, I_c, I_v)$ où D est un ensemble non vide, appelé domaine d'interprétation, I_c est la fonction associe à tout symbole fonctionnel une valeur du domaine D et à tout prédicat un valeur dans $\{0, 1\}$, et I_v est la fonction qui associe à toute variable une valeur de D.*

DÉFINITION.– *L'interprétation d'une formule de la logique des prédicats A associe une valeur de vérité $I(A)$ à A comme suit :*

– si x est une variable libre alors $I(x) = I_v(x)$;

– $I(f(t_1, \cdots, t_n)) = (I_c(f))(I(t_1), \cdots, I(t_n))$;

– $I(P(t_1, \cdots, t_m)) = (I_c(P))(I(t_1), \cdots, I(t_m))$;

– si A et B sont des formules alors $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ s'interprètent comme dans la logique propositionnelle ;

– si A est une formule et x une variable alors $I(\forall x\ A) = 1$ si $I_{x/d}(A) = 1$ pour tout élément $d \in D$ [4] *;*

– si A est une formule et x une variable alors $I(\exists x\ A) = 1$ si $I_{x/d}(A) = 1$ pour au moins un élément $d \in D$.

Soient $A \in \mathcal{L}_{Pr}$, $B \in \mathcal{L}_{Pr}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$, on dispose des définitions suivantes :

DÉFINITION B.3.– *A est une tautologie (ou une formule valide), notée $\models A$, si pour toute interprétation I, $I(A) = 1$.*

DÉFINITION B.4.– *B est une conséquence de A si pour toute interprétation I, $I(A) = 1$ alors $I(B) = 1$, on écrit $A \models B$.*

4. $I_{x/d}(A)$ désigne $I(A)$ où chaque occurence de x est remplacée par d.

DÉFINITION B.5.– *B est une conséquence de $\mathcal{F}$ si pour toute interprétation I, tq $\forall A \in \mathcal{F}, I(A) = 1$ alors $I(B) = 1$, on écrit $\mathcal{F} \models B$.*

DÉFINITION B.6.– *A est satisfaisable ou cohérente s'il existe une interprétation I tq $I(A) = 1$, on appelle I modèle de A et on écrit alors $I \models A$.*

DÉFINITION B.7.– *$\mathcal{F}$ est satisfaisable ou cohérente s'il existe une interprétation I tq $\forall A \in \mathcal{F}, I(A) = 1$, on appelle I modèle de $\mathcal{F}$ et on écrit alors $I \models \mathcal{F}$.*

DÉFINITION B.8.– *A est insatisfaisable ou incohérente si pour toute interprétation I, $I(A) = 0$. On appelle I contre-modèle de A.*

DÉFINITION B.9.– *$\mathcal{F}$ est insatisfaisable si pour toute interprétation I, $\exists A \in \mathcal{F}$ tq $I(A) = 0$. On appelle I contre-modèle de $\mathcal{F}$.*

PROPOSITION B.3.– *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$ un ensemble de formules closes et soit B une formule close $\mathcal{F} \models B$ ssi $\mathcal{F} \cup \{\neg B\}$ est insatisfaisable.*

On a les propriétés suivantes :

PROPOSITION B.4.– *Soit A et B des formules de $\mathcal{L}_{Pr}$:*

$$\begin{array}{lcllcl}
(\forall x\ A \wedge \forall x\ B) & \equiv & \forall x\ (A \wedge B) & \exists x\ (A \vee B) & \equiv & (\exists x\ A \vee \exists x\ B) \\
(\forall x\ A \vee \forall x\ B) & \models & \forall x\ (A \vee B) & \exists x\ (A \wedge B) & \models & (\exists x\ A \wedge \exists x\ B) \\
\forall x\ (A \rightarrow B) & \models & (\forall x\ A \rightarrow \forall x\ B) & \exists x\ (A \rightarrow B) & \equiv & (\forall x\ A \rightarrow \exists x\ B) \\
\forall x\ (A \equiv B) & \models & (\forall x\ A \equiv \forall x\ B) & \forall x\ \neg A & \equiv & \neg \exists x\ A
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\forall x\ \forall y\ A & \equiv & \forall y\ \forall x\ A \\
\exists x\ \exists y\ A & \equiv & \exists y\ \exists x\ A \\
\exists x\ \forall y\ A & \models & \forall y\ \exists x\ A
\end{array}$$

De plus, on dispose des résultats suivants :

THÉORÈME B.2.– *(d'adéquation). $\forall A \in \mathcal{L}_{Pr}$ si $\vdash A$ alors $\models A$ (les formules qui sont des théorèmes sont des tautologies).*

THÉORÈME B.3.– *(de complétude). $\forall A \in \mathcal{L}_{Pr}$ si $\models A$ alors $\vdash A$.*

THÉORÈME B.4.– *(de complétude généralisée). Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$ et $B \in \mathcal{L}_{Pr}$, $\mathcal{F} \models B$ ssi $\vdash B$*

THÉORÈME B.5.– *(de compacité). Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{Pr}$. Si toute famille finie $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ est satisfaisable alors $\mathcal{F}$ est aussi satisfaisable.*

THÉORÈME B.6.– *(de finitude). Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{Pr}$. Soit $B \in \mathcal{L}_{Pr}$ si $\mathcal{F} \models B$ alors $\exists \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ fini tq $\mathcal{F}' \models B$*

PROPOSITION B.5.– *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$ et B une tautologie, $\mathcal{F} \vdash \neg B$ si $\mathcal{F}$ n'a pas de modèle.*

THÉORÈME B.7.– *La logique des prédicats est indécidable, c'est à dire qu'il n'existe aucun programme qui pour une formule $A \in \mathcal{L}_{Pr}$ indique en un temps fini si A est satisfaisable.*

Plus précisemment la logique des prédicats est semi-décidable, c'est à dire qu'il n'est pas possible d'assurer la terminaison d'un programme qui teste la satisfaisabilité d'une formule dans le cas où celle-ci est insatisfaisable.

D'un point de vue algorithmque, les problèmes liés à la quantification peuvent parfois s'avérer gênants, aussi il est possible de se débarasser des quantificateurs comme suit :

DÉFINITION B.10.– *Soit une formule $A \in \mathcal{L}_{Pr}$, A est sous forme prénexe si $A = Q_1\ x_1\ \cdots\ Q_n\ x_n\ M$, où $Q_1, \cdots, Q_n$ est soit $\forall$, soit $\exists$ et M ne contient aucun quantificateur.*

PROPOSITION B.6.– *pour toute formule $A \in \mathcal{L}_{Pr}$ il existe une forme prénexe équivalente à A.*

Les notions de littéraux, clauses et cubes sont étendus à la logique des prédicats comme suit. On appelle littéral une atome ou la négation d'un atome, une clause est une disjonction de littéraux et un cube est conjonction de littéraux. Une forme conjonctive normale est une forme prénexe dont la matrice M est une conjonction de clauses. Une forme disjonctive normale est une forme prénexe dont la matrice M est une disjonction de cubes.

La mise sous forme de Skolem permet de supprimer les quantificateurs dans une formule du calcul des prédicats. Soit une formule $A \in \mathcal{L}_{Pr}$, la mise sous forme de Skolem de A, notée S_A, selon l'algorithme suivant :

`début`

- `transformation de` A `en forme prénexe :` $Q_1\, x_1\, \cdots\, Q_n\, x_n\, M$;
- `transformation de` M `en forme conjonctive normale` M' ;
- `skolémisation :`

`1) associer à toute variable quantifiée existentiellement le terme constitué par un symbole fonctionnel ayant pour arguments la liste des variables quantifiées universellement qui pr´ecèdent la variable ;`

`2) remplacer chaque occurence de variable quantifiée existentiellement par le terme défini en 1) ;`

`3) supprimer les quantificateurs existentiels.`

`fin`

et on a le résultat suivant :

PROPOSITION B.7.– *Soit* S_A *forme de skolem de* A*,* A *est satisfaisable ssi* S_A *est satisfaisable.*

Le théorème de Herbrand permet de ramener le problème de la satisfaisabilité d'une formule de la logique des prédicats au problème de la satisfaisabilité d'un ensemble de clauses propositionnelles. Pour cela, on associe à la forme conjonctive normale d'une formule $A \in \mathcal{L}_{Pr}$, l'ensemble C des clauses correspondantes et on construit l'univers de Herbrand associé à cet ensemble de clauses C, c'est à dire l'ensemble de tous les termes sans variable construit à partir du vocabulaire de C [5].

On appelle système de Herbrand SH_C associé à C, l'ensemble des clauses obtenues à partir de C en remplaçant les variables par des éléments de l'univers de Herbrand.

et on a le résultat suivant :

THÉORÈME B.8.– *théorème de Herbrand Soit* C *un ensemble fini de clauses, et* C *et* SH_C *le système de Herbrand associé à* C*,* C *est satisfaisable ssi* SH_C *est satisfaisable.*

5. C'est à dire l'ensemble des termes construits à partir des symboles fonctionnels et des constantes.

Annexe C

La logique modale propositionnelle

l'objet de cette annexe est un rappel rapide de la logique modale propositionnelle, pour plus de détails le lecteur pourra consulter les ouvrages suivants [KRI 63b], [KRI 63c], [**?**], [FIT 90], [HUG 96], [THA 90].

La logique modale propositionnelle est une extension de la logique propositionelle où de nouvelles modalités $\Box$ et $\Diamond$ (connecteurs logiques) ont été introduits pour la représentation des connaissances, des croyances, des normes, des désirs, des actions des conditionnels du temps ou de l'espace. On pourra, par exemple lire $\Box A$ comme "il est nécessaire que A", " A est connu", " A est cru", "il faut que A ", "il est certain que A ", "il sera toujours vrai que A ", "Partout ailleurs on a A " et $\Diamond A$ comme " il est possible que A", " il est envisageable que A", " il est permis que A", " il est plausible que A ", "il sera parfois vrai que A ", "Quelque part ailleurs on a A ".

C.1. Le langage de la logique modale propositionnelle

Le langage de la logique modale propositionnelle est construit à partir d'un ensemble dénombrable de variables propositionnelles $\mathcal{P}$ (des lettres éventuellement indicées), des constantes 0 (Faux) et 1 (Vrai)[1] des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, des modalités : $\Box$, $\Diamond$ et de parenthèses.

DÉFINITION C.1.– *L'ensemble des formules bien formées de la logique modale propositionnelle est le plus petit ensemble tel que :*

– 0 *et* 1 *sont des formules ;*

– *une variable propositionnelle (ou proposition) est une formule ;*

Chapitre rédigé par Odile Papini.

1. Les constantes sont quelqefois notées $\perp$ pour Faux et $\top$ pour Vrai.

– *si A et B sont des formules alors $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ sont des formules ;*

– *$\Box A$ et $\Diamond A$ sont des formules.*

Si A est une formule alors $\Diamond A =_{def} \neg\Box\neg A$.

C.2. Aspect axiomatique de la logique propositionnelle

L'aspect axiomatique de la logique modale propositionnelle revient à définir un système formel dans lequel les déductions que l'on peut faire conduisent à des théorèmes.

C.2.1. *Le système K*

Les axiomes du système K sont les suivants : soit A, B, C des formules de la logique modale propositionnelle

A1 : $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$;
A2 : $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$;
A3 : $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$;
K : $(\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B))$.

Soit Γ et Δ des ensembles de formules de la logique modale propositionnelle, dans le système K les règles d'inférence sont la substitution, le modus ponens :

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

, et la règle de nécéssité (règle N) :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \Box\, A}$$

On peut définir la déduction comme suit :

DÉFINITION C.2.– *K-dérivation Soit F une formule modale et Γ un ensemble de formules modales une K-dérivation de F à partir de Γ est une séquence de formules se terminant par F, dont chaque formule est :*

– *soit une axiome,*

– *soit un membre de Γ,*

– *soit obtenu par l'application des règles de substitution, de modus ponens ou de nécessité.*

Une K-preuve de F est une K-dérivation de F à partir de $\emptyset$.

A partir des règles de déduction on peut définir les règles dérivées suivantes : règle de régularité pour $\Box$ (règle R) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash \Box\ A \to \Box\ B}$$

règle de régularité généralisée pour $\Box$:

$$\frac{\Gamma \vdash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to B}{\Gamma \vdash (\Box\ A_1 \wedge \cdots \wedge \Box\ A_n) \to \Box\ B}$$

ainsi que la règle de régularité pour $\Diamond$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash \Diamond\ A \to \Diamond\ B}$$

Avec le système K on peut prouver le résultat suivant :

PROPOSITION C.1.– *Soit A, B, C des formules de la logique modale propositionnelle. toutes les formules suivantes sont des théorèmes :*

$\vdash \Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$ *;*
$\vdash (\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B)$ *;*
$\vdash \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$ *;*
$\vdash (\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$ *;*
$\vdash \Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$ *;*
$\vdash \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$ *;*
$\vdash \Diamond(A \to B) \leftrightarrow (\Box A \to \Diamond B)$ *;*
$\vdash \Diamond(A \wedge B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B)$ *;*
$\vdash \Box(A \vee B) \to (\Box A \vee \Diamond B)$.

C.2.2. *Les systèmes formels modaux*

Plusieurs systèmes formels sont possibles selon les axiomes utilisés, nous avons vu le système formel K formé à partir des axiomes, A1, A2, A3 et K.

Le système formel KT est formé à partir des axiomes, A1, A2, A3, K et de l'axiome *de la connaissance* T : $\Box\ A \to A$.

Le système formel $KT4$ ou $S4$ est formé à partir des axiomes, A1, A2, A3, K, T et de l'axiome *d'introspection positive* 4 : $\Box\ A \to \Box\ \Box\ A$.

Le système formel $KT45$ ou $S5$ est formé à partir des axiomes, A1, A2, A3, K, T, 4 et de l'axiome *d'introspection négative* 5 : $\Diamond\ A \to \Box\ \Diamond\ A$.

C.3. Aspect sémantique de la logique modale propositionnelle

La sémantique de la logique modale propositionnelle est une sémantique des “mondes possibles” c'est à dire qu'une formule de la logique modale est évaluée dans un “univers” de mondes possibles qui sont reliés par une relation d’accessibilité. Le formule $\Box A$ est vraie dans un monde possible ω si A est vraie dans tous les mondes possibles accessibles à partir de ω. La formule $\Diamond A$ est vraie dans un monde possible ω si A est vraie dans au moins un monde possible accessible à partir de ω. Plus formellement :

DÉFINITION C.3.– *On appelle*

– *système : la paire* $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ *où* $\mathcal{W}$ *est l’ensemble des interprétations du langage et* $\mathcal{R}$ *est une relation binaire sur* $\mathcal{W}$ *telle que* $\omega,\ \omega' \in \mathcal{W}$, $\omega\mathcal{R}\omega'$ *signifie que* ω' *est accessible à partir de* ω.

– *valuation : l’application* v *de* $\mathcal{W} \times \mathcal{P}$ *dans* $\{0,\ 1\}$ *qui associe une valeur de vérité* $v(\omega, p)$ *à la variable* p *dans l’interprétation* ω.

– *modèle : le triplet* $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, v)$ *où* $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ *est un système et* v *une valuation.*

On note $\mathcal{M}, \omega \models F$ pour exprimer que F est vraie dans le monde possible ω pour le modèle $\mathcal{M}$ et la relation de conséquence logique est définie par :

DÉFINITION C.4.– *Soit* $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, v)$ *un modèle,*

– $\mathcal{M}, \omega \models p$ *ssi* $v(\omega, p) = 1$.

– $\mathcal{M}, \omega \models \top$.

– $\mathcal{M}, \omega \not\models \bot$.

– $\mathcal{M}, \omega \models \neg A$ *ssi* $\mathcal{M}, \omega \not\models A$.

– $\mathcal{M}, \omega \models A \rightarrow B$ *ssi* $\mathcal{M}, \omega \not\models A$ *ou* $\mathcal{M}, \omega \models B$.

– $\mathcal{M}, \omega \models A \wedge B$ *ssi* $\mathcal{M}, \omega \models A$ *et* $\mathcal{M}, \omega \models B$.

– $\mathcal{M}, \omega \models \Box A$ *ssi* $\mathcal{M}, \omega' \models A$ *pour tout* ω' *tq* $\omega\mathcal{R}\omega'$.

– $\mathcal{M}, \omega \models \Diamond A$ *ssi* $\mathcal{M}, \omega' \models A$ *pour au moins un modèle* ω' *tq* $\omega\mathcal{R}\omega'$.

La notion de validité est définie comme suit :

DÉFINITION C.5.– *Soit* $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, v)$ *un modèle,*

– *une formule* A *est valide dans un modèle* $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, v)$ *ssi* A *est vraie dans tous les mondes possibles du modèle, et on écrit* $\mathcal{M} \models A$.

– *une formule* A *est valide dans un système* $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ *ssi* A *est vraie dans tout modèle* $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, v)$ *et on écrit* $(\mathcal{W}, \mathcal{R}) \models A$.

– *une formule* A *est valide (ou est une tautologie) ssi* A *est vraie dans tout système* $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ *et on écrit* $\models A$.

THÉORÈME C.1.– *Soit* C *une collection de modèles, l’ensemble des formules* C*-valides inclut :*

– *toute tautologie,*

– *toutes les formules de la forme* $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$,

– B *lorsque elle inclut* A *et* $A \rightarrow B$,

– $\Box A$ *lorsqu'elle inclut* A.

DÉFINITION C.6.– *Une logique modale propositionnelle est dite normale si elle vérifie les conditions du théorème C.1.*

Il y a une infinité de logiques modales qui se comportent plus ou moins bien, les plus courantes sont les suivantes :

K est la logique modale la plus faible dont la formule caractéristique est $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$,

T : systèmes réflexifs, la relation $\mathcal{R}$ est réflexive et la formule caractéristique est $\Box A \to A$,

$K4$: systèmes transitifs, la relation $\mathcal{R}$ est transitive et la formule caractéristique est $\Box A \to \Box\Box A$,

$S4$: systèmes réflexifs et transitifs, la relation $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive,

KB : systèmes symétriques, la relation $\mathcal{R}$ est symétrique et la formule caractéristique est $\Box A \to \Box\Diamond A$,

B : systèmes réflexifs et symétriques, la relation $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique,

$S5$: systèmes réflexifs, symétriques et transitifs, la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et la formule caractéristique est $\neg\Box A \to \Box\neg\Box A$.

Les résultats d'adéquation et de complétude pour les différentes logiques modales sont les suivants :

THÉORÈME C.2.– *système formel* K *Soit* A *une formule de la logique modale* K, $\vdash A$ *ssi* $\models A$.

THÉORÈME C.3.– *système formel* T *Soit* A *une formule de la logique modale* T, $\Box A \to A$ *est une tautologie ssi* $\mathcal{R}$ *est réflexive.*

THÉORÈME C.4.– *système formel* $S4$ *Soit* A *une formule de la logique modale* $S4$, $\Box A \to \Box\Box A$ *est une tautologie ssi* $\mathcal{R}$ *est transitive*

THÉORÈME C.5.– *système formel* $S5$ *Soit* A *une formule de la logique modale* $S5$, $\neg\Box A \to \Box\neg\Box A$ *est une tautologie ssi* $\mathcal{R}$ *est euclidienne.*

De plus, pour les logiques modales propositionnelles on dispose du résultat suivant :

THÉORÈME.– *Les logiques* K, T, $S4$, $S5$ *sont décidables.*

Annexe D

La logique intuitionniste

La logique intuitionniste trouve son origine dans un débat qui a opposé, au début du XXième siècle, deux courants de pensée, celui de Hilbert qui met l'accent sur le côté mécanique des mathématiques et celui de Brouwer[BRO 75] qui insiste sur la subjectivité du mathématicien. L'école intuitionniste considère qu'il n y a pas de réalité extérieure au mathématicien, les mathématiques, donc la logique, sont une activité mentale et les objets mathématiques et leurs propriétés sont des constructions mentales. Selon cette école il n'est jamais question de vérité mathématique, mais de prouvabilité. Ces considérations conduisent à remettre en cause le principe du tiers exclus $A \vee \neg A$ qui apparaît comme injustifié ou incorrect, il existe des conjectures, par exemple, la conjecture de Goldbach[1] qui s'avèrent correctes et pour lesquelles on ne dispose pas de preuve de leur validité ni de preuve de la validité de leur négation. De même, le principe de la double négation $\neg\neg A \to A$ est également remis en cause, l'école intuitionniste considère qu'il n'est pas légitime d'inférer la vérité d'un énoncé A de la fausseté de sa négation, il faut accepter que dans certains cas cet énoncé A reste indécidé et ce, même si une preuve de $\neg A$ a été établie, aussi longtemps qu'on n'a pas produit une preuve de A.

Chapitre rédigé par Odile Papini.

1. Conjecture de Goldbach : tout nombre entier pair est comme la somme de deux nombre premiers.

D.1. Le langage de la logique intuitionniste

La logique intuitionniste[HEY 56] utilise le langage de la logique classique qui est construit à partir d'un ensemble infini dénombrable de symboles de prédicats ou prédicats, d'un ensemble infini dénombrable de symboles **fonctionnels** [2], d'un ensemble infini dénombrables de variables, des connecteurs : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ et des quantificateurs universel $\forall$, et existentiel $\exists$.

D.2. Aspect syntaxique de la logique intuitionniste

Un système formel pour la logique intuitionniste peut être défini à partir des axiomes suivants :

A1 : $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$;

A2 : $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R))$;

A3 : $P \rightarrow (Q \rightarrow P \wedge Q)$;

A4 : $P \wedge Q \rightarrow P, \vdash P \wedge Q \rightarrow Q$;

A5 : $P \rightarrow P \vee Q, \vdash Q \rightarrow P \vee Q$;

A6 : $(P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow R))$;

A7 : $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$;

A8 : $P \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$;

A9 : $P(t) \rightarrow \exists x\, P(x)$;

A10 : $\forall x P(x) \rightarrow P(t)$.

Soit Γ et Δ des ensembles de formules de la logique intuitionniste, les règles d'inférence de ce système formel sont la règle de substitution, la règle de déduction, ou modus ponens :

$$\frac{\Gamma \vdash P,\ \Delta \vdash P \rightarrow Q}{\Gamma, \Delta \vdash Q}$$

la règle de généralisation :

$$\frac{\Gamma \vdash P \rightarrow Q(x)}{\Gamma \vdash P \rightarrow \forall x\ Q(x).}$$

et la règle d'instanciation :

$$\frac{\Gamma \vdash P(x) \rightarrow Q}{\Gamma \vdash \exists x\ P(x) \rightarrow Q.}$$

Comme en logique classique on dispose du théorème de déduction :

THÉORÈME D.1.– *Théorème de déduction.* $\forall P_1, \ldots, P_{n-1}, Q$ *des formules de la logique intuitionniste,*
$P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Q$ *si et seulement si* $P_1, \ldots, P_{n-1} \vdash (P_n \rightarrow Q)$.

2. les symboles constants sont des symboles fonctionnels d'arité 0.

D.3. Aspect sémantique de la logique intuitionniste

Plusieurs sémantiques ont été proposées pour la logique intuitionniste, une sémantique de Kripke [DAL 86], une sémantique de Beth, une algèbre de Heyting[HEY 56], nous présentons briévement ici l'interprétation topologique de la logique intuitionniste, proposée par Tarski[TAR 74]. Cette sémantique fait correspondre à toute formule un ensemble d'ouverts d'un espace topologique et aux connecteurs des opérations ensemblistes sur des ensembles d'ouverts. Un *espace topologique* est défini comme suit :

DÉFINITION.– *Soit U un ensemble, un* espace topologique *est une paire* $< \mathcal{U}, \mathcal{T} >$ *où* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$*, tel que :*

– $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$
– $\emptyset \in \mathcal{T}$
– *si* $U, V \in \mathcal{T}$ *alors* $U \cap V \in \mathcal{T}$
– *si* $U_i \in \mathcal{T}$*, pour* $i \in I$*, alors* $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

L'espace topologique est muni d'un opérateur d'intérieur, noté i, qui associe à tout ouvert son intérieur[3] et qui vérifie les propriétés suivantes : Soit $\mathcal{U}$ un espace topologique et X un ouvert,

– $X \cap i(X) = i(X)$;
– $i(i(X)) = i(X)$;
– $i(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$;
– $i(X \cap Y) = i(X) \cap i(Y)$.

Dans cette approche, une interprétationest définie comme suit :

DÉFINITION D.1.– *Une* interprétation *est quintuplet* $I = (\mathcal{U}, i, \mathcal{P}, \mathcal{D}, d)$ *où U est espace topologique,* i *est la fonction qui fait correspondre à un ouvert son intérieur,* $\mathcal{P}$ *est un ensemble dénombrable de propositions,* $\mathcal{D}$ *un domaine de valeurs, et* d *la fonction qui associe à chaque formule un ouvert d'un espace topologique* $\mathcal{U}$ *comme suit :*

– $d(P \wedge Q) = d(P) \cap d(Q)$;
– $d(P \vee Q) = d(P) \cup d(Q)$;
– $d(\neg P) = i(\overline{d(P)})$,[4]
– $d(P \rightarrow Q) = i(\overline{d(P)} \cup d(Q))$;
– $d(\exists x\, P(x)) = \cup\{d(P(a)),\ a \in \mathcal{D}\}$;
– $d(\forall x\, P(x)) = i(\cap\{d(P(a)),\ a \in \mathcal{D}\})$.

3. un ouvert X est tel que $i(X) = X$.
4. Soit X un ensemble, on note $\overline{X}$ le complémentaire de X.

DÉFINITION D.2.– *Soit $\mathcal{U}$ un espace topologique et P une formule de la logique intuitionniste, une formule P est valide (ou vraie) dans un espace topologique $\mathcal{U}$, noté $\models_{\mathcal{U}} P$ si $d(P) = \mathcal{U}$ pour toutes les interprétations.*

PROPOSITION D.1.– *Soit P une formule de la logique intuitionniste, P est une tautologie, noté $\models P$ si P est valide dans tout espace topologique.*

THÉORÈME D.2.– *Théorème de complétude Soit P une formule de la logique intuitionniste, $\vdash P$ si et seulement si $\models P$.*

REMARQUE.– La sémantique de Tarski rejette bien le principe du tiers exclu, car la formule $A \vee \neg A$ est interprétée par $d(A \vee \neg A) = A \cup i(\overline{A})$ et $d(A \vee \neg A) \neq \mathcal{U}$ car les points à la frontière de $d(A)$ ne se trouvent ni dans $d(A)$ ni dans $i(\overline{d(A)})$.

Annexe E

La révision des croyances

L'objet de cette annexe est un survol rapide sur la révision des croyances, pour plus de détails le lecteur pourra consulter les articles suivants [G¨ 88], [PAP 00], [KAT 91], [JEA 00], [ALC 85], [DAR 97].

Dans le contexte des connaissances spatiales, on est confronté à des données de différents types, provenant de différentes sources caractérisées par des degrés de confiance divers. Les méthodes d'acquisition varient et fournissent des données de qualités très inégales. On est en présence d'informations incomplètes, imprécises, incertaines qui nécessitent un formalisme de représentation logique adéquat. Par ailleurs, l'utilisation de ces connaissances nécessite la formalisation de raisonnements à partir de celles-ci. En particulier, les informations provenant de sources différentes peuvent rentrer en contradiction et nécessitent la formalisation d'opérations de révision et de fusion des connaissances. Les connaissances spatiales se caractérisent par des données de grande taille et requièrent pour leur traitement, l'adaptation d'algorithmes existants ou la mise en oeuvre d'algorithmes spécifiques [JEA 00].

Etat épistémique

Dans le domaine de la représentation des connaissances pour l'intelligence artificielle, un état épistémique symbolise les croyances qu'un agent intelligent a du monde réel sur la base des informations dont il dispose. La plupart du temps, l'agent est confronté des informations incomplètes, incertaines et imprécises. Dans le contexte de la révision des croyances, un état épistémique a tout d'abord été représenté par un ensemble de formules déductivement clos [ALC 85, G¨ 88] ou une formule [KAT 91] qui représente les croyances courantes de l'agent. Cependant, un état épistémique ne

---

Chapitre rédigé par Odile Papini.

représente pas seulement les croyances courantes d'un agent intelligent mais aussi la stratégie que l'agent utilise pour modifier ses croyances en présence de nouvelles informations, en particulier, dans le cas de révision itérée [DAR 97]. En conséquence, un état épistémique est souvent représenté par un pré-ordre total sur les formules ou les interprétations du langage sous-jacent, une distribution de probabilité ou une distribution de possibilité. Dans la suite, on note Ψ un état épistémique et $Bel(\Psi)$ son ensemble de croyances correspondant qui représente l'ensemble des croyances courantes de l'agent.

Révision de croyances

La révision de croyances est l'étude des moyens rationnels qu'un agent utilise pour modifier son état épistémique en présence d'une nouvelle information. L'état épistémique de l'agent doit être modifié afin de restaurer la cohérence en conservant la nouvelle information tout en modifiant le moins possible les informations initiales dont il dispose. Les premières formalisations de la révision proviennent du domaine de la logique philosophique avec les travaux de Gärdenfors en 1978, où la révision est interprétée comme un changement de croyances. Alchourron, Gärdenfors et Makinson 1985 ont formulé des postulats, appelés postulats AGM [ALC 85] pour caracteriser la révision. Ces postulats reposent sur trois idées principales : (1) le principe de cohérence (une opération de révision doit produire un ensemble de croyances cohérent) ; (2) le principe de changement minimal (une opération de révision doit changer le moins possible les croyances initiales) ; (3) la priorité est donnée à la nouvelle information. Ces postulats se focalisent sur la structure logique des croyances. Ils sont basés sur la théorie de la cohérence et ils ne prennent pas en compte la justification des croyances comme dans le cas des systèmes TMS [DOY 79, DEK 86].

Alchourron, Gärdenfors et Makinson [ALC 85] ont proposé un cadre formel dans lequel la révision est interprétée comme un changement de croyances et un état épistémique est représenté par une théorie propositionnelle, c'est à dire un ensemble déductivement clos de formules propositionnelles. Afin de caractériser la révision ils ont formulé huit postulats que toute opération de révision devrait satisfaire :

Les postulats AGM

Soit T une théorie et soit A et B des formules propositionnelles. On note $T \star A$ la théorie T revisée par A. On note $T + A$ le plus petit ensemble déductivement clos de formules contenant à la fois T et A. On note $T^{\perp}$ l'ensemble de toutes les formules.

$(G \star 1)$ $T \star A$ est une théorie.
$(G \star 2)$ $A \in T \star A$.
$(G \star 3)$ $T \star A \subseteq T + A$.
$(G \star 4)$ Si $\neg A \notin T$ alors $T \star A = T + A$.
$(G \star 5)$ $T \star A = T^{\perp}$ seulement si A est insatisfaisable.
$(G \star 6)$ Si $A \equiv B$ alors $T \star A = T \star B$.
$(G \star 7)$ $T \star (A \wedge B) \subseteq (T \star A) + B$.
$(G \star 8)$ Si $\neg B \notin T \star A$ alors $(T \star A) + B = T \star (A \wedge B)$.

Le postulat $(G \star 1)$ exprime qu'une theorie revisée par une formule est une théorie. $(G \star 2)$ spécifie qu'une formule A appartient à la théorie revisée. $(G \star 3)$ et $(G \star 4)$ donnent le resultat de la révision lorsque A est cohérent avec T. $(G \star 5)$ est lié à la préservation et à la restauration de cohérence, $(G \star 6)$ spécifie que le resultat de la révision doit être indépendant de la syntaxe. $(G \star 7)$ et $(G \star 8)$ soulignent que lorsque A est cohérent avec T le changement doit être minimal. Réviser T de façon minimale pour inclure A et B devrait conduire à une expansion de $T \star A$, dans la mesure où B ne contredit pas $T \star A$.

Katsuno et Mendelzon [KAT 91] ont ensuite proposé une reformulation des postulats AGM lorsque un état épistemique est representé par une seule formule propositionnelle ψ. Cette reformulation unifie les approches sémantiques de la révision dans un cadre commun. La révision par une formule propositionnelle μ, notée $\psi \circ \mu$, consiste à rechercher les modèles de μ les plus proches possibles (dans un certaine métrique) des modèles de ψ. Ces approches reposent sur le principe de la non-pertinence de la syntaxe. Ce principe affirme que l'état épistemique resultant de la révision doit être independant de la syntaxe de l'état épistemique initial tout comme du processus de revision [1].

Si un état épistemique est à la fois représenté par T une théorie, et par une formule propositionnelle ψ telle que $T = \{\phi \mid \psi \models \phi\}$ alors la correspondance entre $T \star \mu$ et $\psi \circ \mu$ a été établie comme suit :

Reformulation des postulats AGM par KM
Soit ψ, ϕ et μ des formules,

(R1) $\psi \circ \mu$ implique μ.
(R2) Si $\psi \wedge \mu$ est satisfaisable, alors $\psi \circ \mu \equiv \psi \wedge \mu$.
(R3) Si μ est satisfaisable, alors $\psi \circ \mu$ l'est aussi.
(R4) Si $\psi_1 \equiv \psi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors $\psi_1 \circ \mu_1 \equiv \psi_2 \circ \mu_2$.
(R5) $(\psi \circ \mu) \wedge \phi$ implique $\psi \circ (\mu \wedge \phi)$.
(R6) Si $(\psi \circ \mu) \wedge \phi$ est satisfaisable, alors $\psi \circ (\mu \wedge \phi)$ implique $(\psi \circ \mu) \wedge \phi$.

1. Ce principe ne fait pas l'unanimité comme l'illustrate l'exemple célèbre du restaurant proposé par Hansson voir[KAT 91].

Le postulat (R1) spécifie que la formula ajoutée appartient à l'état épistémique révisé, (R2) donne l'état épistémique révisé lorsque la formule ajoutée est cohérente avec l'état épistémique initial, (R3) assure qu'aucune incohérence n'est introduite dans l'état épistémique révisé, (R4) exprime le principe de non-pertinence de la syntaxe, et (R5) et (R6) sont la traduction directe des postulats $(G\star 7)$ et $(G\star 8)$.

Le principe du changement minimal conduit à la définition de relations de preference entre les interprétations. Katsuno et Mendelzon ont synthétisé les differentes métriques proposées qui permettent de comparer les differentes interprétations et qui permettent de respecter la plupart des postulats ci-dessus. De plus, ils ont montré qu'une opération de révision qui satisfait les postulats AGM est équivalente à un pré-ordre total sur les interprétations du langage logique sous-jacent.

Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble des interpretations du langage logique sous-jacent (logique propositionnelle) et soit $Mod(\psi)$ l'ensemble des modèles de ψ. On définit un preordre sur $\mathcal{W}$, lié à ψ, noté $\leq_\psi$ et la relation $<_\psi$ est définie à partir de $\leq_\psi$ comme : $\omega <_\psi \omega'$ iff $\omega \leq_\psi \omega'$ and $\omega' \not\leq_\psi \omega$.

Définition 12 *Une fonction d'un état épistémique ψ vers un pré-ordre total $\leq_\psi$ est une assignation fidèle si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :*

1) si $\omega, \omega' \in Mod(\psi)$ alors on n'a pas $\omega <_\psi \omega'$;

2) si $\omega \in Mod(\psi)$ et $\omega' \notin Mod(\psi)$ alors on a $\omega <_\psi \omega'$;

3) si $\psi \equiv \phi$ alors $\leq_\psi = \leq_\phi$.

Une interprétation minimale peut être définie comme suit. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{W}$, on note $Min(\mathcal{M}, \leq_\psi)$ l'ensemble des interpretations minimales dans $\mathcal{M}$ selon $\leq_\psi$. On dit que ω est minimale dans $\mathcal{M}$ selon $\leq_\psi$, si $\omega \in \mathcal{M}$ et il n'existe pas $\omega' \in \mathcal{M}$ telle que $\omega' <_\psi \omega$. Katsuno et Mendelzon ont donné le théorème de représentation :

Théorème 6 *Un opérateur de révision $\circ$ satisfait les postulats $(R1) - (R6)$ ssi il existe une assignation fidèle qui associe à chaque état épistémique ψ un pré-ordre total $\leq_\psi$ tel que :*

$$Mod(\psi \circ \mu) = min(Mod(\mu), \leq_\psi).$$

Révision itérée

La révision en une étape a été caractérisée avec succès par les postulats AGM [ALC 85]. Dans ce cadre, un état épistémique est représenté par ensemble de formules déductivement clos qui représente les croyances courantes de l'agent. Cependant, un état épistémique est une entité plus complèxe, qui ne représente pas uniquement les croyances courantes de l'agent mais aussi la strategie que l'agent utilise pour modifier ses croyances en presence d'une nouvelle information. Une opération de révision satisfaisant les postulats AGM est équivalente à un pré-ordre total sur les interprétations.

Bien que très élégant, ce cadre formel ne permet pas la représentation de l'itération car l'approche AGM se concentre uniquement sur les interpretations minimales selon les pré-ordres totaux et la relation de préférence entre les interprétations sous-jacente est perdue dans le processus de changement.

Comme les postulats AGM ne capturent pas la révision de croyances itérée, des postulats supplémentaires ont été proposés pour caractériser la révision itérée. Lehmann [LEH 95] considère l'état épistémique de l'agent comme une séquence d'observations. Dans l'approche de Darwiche et Pearl [DAR 97], un état épistémique est représenté par un pré-ordre total sur les interprétations du langage logique et les postulats AGM sont re-écrits pour les états épistémiques comme suit :

Postulats AGM modifiés pour les états épistémiques

Soit Ψ, Ψ_1, Ψ_2 des états épistémiques ayant pour ensembles de croyances respectifs $Bel(\Psi)$, $Bel(\Psi_1)$, $Bel(\Psi_2)$ et soit μ et ϕ des formules propositionnelles,

- $(ER1)$ $Bel(\Psi \circ \mu) \models \mu$.
- $(ER2)$ Si $Bel(\Psi) \wedge \mu$ est satisfaisable, alors $\Psi \circ \mu \equiv \Psi \wedge \mu$.
- $(ER3)$ Si μ est satisfaisable, alors $Bel(\Psi \circ \mu)$ l'est aussi.
- $(ER4)$ Si $\Psi_1 = \Psi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors, $\Psi_1 \circ \mu_1 = \Psi_2 \circ \mu_2$.
- $(ER5)$ $Bel(\Psi \circ \mu) \wedge \phi \models Bel(\Psi \circ (\mu \wedge \phi))$.
- $(ER6)$ Si $Bel(\Psi \circ \mu) \wedge \phi$ est satisfaisable, alors $Bel(\Psi \circ (\mu \wedge \phi)) \models Bel(\Psi \circ \mu) \wedge \phi$.

$(ER1)$, $(ER2)$, $(ER3)$, $(ER5)$ et $(ER6)$ sont les traductions directes des postulats corespondant AGM. Pour $(ER5)$ et $(ER6)$ on suppose $\not\models \neg\mu$. En revanche, $(ER4)$ est une version plus faible du postulat AGM $(R4)$ original ; il impose l'égalité des états épistémiques pour qu'ils soient révisés de la même manière.

La notion d'assignation fidèle est étendue aux états épistémiques. Une fonction d'un état épistémique Ψ vers un pré-ordre total $\leq_\Psi$ est une assignation fidèle si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

1) si $\omega, \omega' \models Bel(\Psi)$ alors $\omega =_\psi \omega'$;

2) si $\omega \models Bel(\Psi)$ et $\omega' \not\models Bel(\Psi)$ alors $\omega <_\psi \omega'$;

3) si $\Psi = \Phi$ alors $\leq_\psi = \leq_\phi$.

La condition $3)$ nécessite maintenant l'égalité des états épistémiques. Darwiche et Pearl ont reformulé le théorème de représentation comme suit :

Théorème 7 *Un opérateur de révision* $\circ$ *verifie les postulats* $(ER1) - (ER6)$ *ssi il existe une assignation fidèle qui à chaque état épistémique* Ψ *fait correspondre un pré-orde total* $\leq_\Psi$ *tel que* $Mod(Bel(\Psi \circ \mu)) = min(Mod(\mu), \leq_\Psi)$.

Darwiche et Pearl [DAR 97] ont ensuite formulé des postulats qui contraignent les relations entre deux états épistémiques succéssifs. Intuitivement, en termes de pré-ordres, les postulats DP préservent l'ordre relatif entre les modèles de la formule ajoutée. De plus, l'ordre relatif entre les contre-modèles de la formule ajoutée est aussi préservé et l'ordre entre modèles et contre-modèles de la formula ajoutée ne change pas.

Postulats DP pour la révision itérée

Soit Ψ un état épistémique, $Bel(\Psi)$ son ensemble de croyances associé, μ et α des formules propositionnelles,

$(C1)$ Si $\alpha \models \mu$ alors $(\Psi \circ \mu) \circ \alpha \equiv \Psi \circ \alpha$.
$(C2)$ Si $\alpha \models \neg\mu$ alors $(\Psi \circ \mu) \circ \alpha \equiv \Psi \circ \alpha$.
$(C3)$ Si $Bel(\Psi \circ \alpha) \models \mu$ alors $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \models \mu$.
$(C4)$ Si $Bel(\Psi \circ \alpha) \not\models \neg\mu$ alors $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \not\models \neg\mu$.

Les postulats $(C1)$, $(C2)$, $(C3)$ et $(C4)$ en relation avec les pré-ordre totaux associés à deux états épistémiques successifs sont les suivants :

$(CR1)$ Si $\omega_1 \models \mu$ et $\omega_2 \models \mu$ alors $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ ssi $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.
$(CR2)$ Si $\omega_1 \models \neg\mu$ et $\omega_2 \models \neg\mu$ alors $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ ssi $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.
$(CR3)$ Si $\omega_1 \models \mu$ et $\omega_2 \models \neg\mu$ alors $\omega_1 <_\Psi \omega_2$ seulement si $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.
$(CR4)$ Si $\omega_1 \models \mu$ et $\omega_2 \models \neg\mu$ alors $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ seulement si $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

et on a le résultat suivant :

Théorème 8 *L'operateur* $\circ$ *verifie* $(C1) - (C4)$ *et son assignation fidèle correspondante vérifie* $(CR1) - (CR4)$.

Survol des principales approches

Les postulats proposés pour la révision sont non-constructifs et de nombreuses approches de la révision ont été proposées ces quinze derniéres années. Cependant, aucune des approches proposées n'est satisfaisante dans toutes les situations. Le choix de la méthode dépend essentiellement du contexte d'application. C. Alchourron, P. Gärdenfors et D. Makinson 1987 ont proposé une opération de révision [G¨ 88] pour les ensembles de formules déductivement clos, appelée *partial meet contraction*. Cette opération utilise l'identité de Levi qui définit l'opération de révision à partir de l'opération de contraction, qui est définie à partir de l'intersection de certain sous-ensembles de formules maximaux cohérents. Ils ont aussi défini un pré-ordre total entre les formules appelé *enracinement épistemique*, qui permet l'application du principe de changement minimal.

Les différents travaux réalisés par la suite peuvent être classés selon differents points de vue : on peut distinguer les approches syntaxiques et approches sémantiques. Dans les approches syntaxiques, une plus grande importance est accordée aux formules représentées explicitement, comme par exemple, l'opération de révision de B. Nebel [NEB 91], definie dans le contexte des bases de croyances finies, ou celle définie par Grove avec les systèmes de sphères [GRO 88], toutes deux reliées à l'opération de contraction "partial meet" issue des travaux de P. Gärdenfors. Differentes approches de la révision syntaxique ont été ensuite proposées pour la révision d'un ensemble fini de formules propositionnelles [BEN 93, DEK 90, LEH 95], comme la révision par r-ensemble [PAP 92] qui repose sur le retrait d'un ensemble minimal de formules, appelé r-ensemble, pour restaurer la cohérence.

Les approches sémantiques reposent sur la théorie des modèles où un état épistémique est représenté par une seule formule. Les modèles de l'état épistémique révisé sont les modèles de la formule rajoutée qui sont les plus proches de modèles de l'état épistémique initial. Le principe du changement minimal est défini en termes de distances ou de pré-ordres entre les modèles. Cette approche a été suivie par plusieurs auteurs, par exemple, Borgida [BOR 85] et Dalal [DAL 88] : ces travaux diffèrent seulement par le choix du pré-ordre utilisé. Ces approches ont été unifiées dans un cadre formel commun par Katsuno et Mendelzon [KAT 91], qui ont donné une nouvelle formulation des postulats AGM, appelée formulation KM, et ont fourni un théorème de représentation qui montre l'équivalence entre ces postulats et un processus de révision basé sur des pré-ordres totaux entre les interpretations. Par exemple, la *fonction ordinale conditionnelle* de Spohn illustre un mécanisme de révision basé sur l'ordonnancement des interprétations [SPO 88]. Des approches mixtes ont aussi été proposées, afin de tirer parti à la fois des approches syntaxiques et des approches sémantiques [WIL 90], [PAP 95].

La plupart de ces approches considèrent la révision en une étape, cependant, certaines applications nécessitent l'itération du processus de révision qui a fait l'objet de plusieurs travaux. Le paradigme AGM ne permet pas de représenter la révision itérée car la relation de préférence sous-jacente est perdue dans le processus de changement et il faut définir une politique de changement.

Dans la plupart des approches, les états épistémiques sont représentés par des pré-ordres totaux sur les interprétations. Réviser revient à changer le pré-ordre total en présence d'une nouvelle information.

La révision naturelle de Boutilier[BOU 93] repose sur le principe minimisation absolue. Cette opération tente de minimiser les changements des pré-ordres. Les meilleures interprétations satisfaisant la nouvelle formule μ sont préferées et l'ordre relatif entre les autres interprétations est préservé.

En étendant les travaux de Spohn M. A. Williams [WIL 94], [WIL 95] considère le processus de changement d'une relation de préférence sous-jacente comme une transmutation. L'information ajoutée est une formule α et un ordinal i qui représentent l'information qui doit être acceptée avec un degré de fermeté i. La (α, i)-transmutation d'un pré-ordre entraîne le changement minimal du pré-ordre initial de telle sorte que la formule α est acceptée avec un degré de fermeté de i.

Dans le cadre possibiliste, un état épistémique Ψ est représenté par une distribution de possibilité π. On affecte à chaque interprétation un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. La valeur 1 signifie que l'interprétation est totalement possible tandis que la valeur 0 signifie que l'interprétation est totalement impossible. La révision possibiliste de Dubois et Prade [DUB 92, DUB 97], préserve l'ordre relatif des modèles de μ mais considère que tous les contre-modèles d'une nouvelle information μ sont impossibles.

L'opération de révision reposant sur l'historique d'une séquence d'observations d'un agent proposée par Papini [PAP 01, BEN 02] préfère la dernière information. L'intuition sous-jacente repose sur le fait que l'agent se souvient de toutes ses observations précédentes. Cependant, ces observations n'ont pas toutes la même importance, selon qu'elles sont préférées ou pas dans l'état épistémique suivant.

La philosophie générale est qu'une ancienne observation est moins fiable qu'une nouvelle. Dans le cadre de la prédiction, il semble raisonnable de faire décroître avec le temps la confiance que l'on a en une information. Cependant, cette opération de révision tente de satisfaire le plus d'observations précédentes possibles. C'est à dire, une ancienne observation persiste jusquà ce qu'elle devienne contradictoire avec une information plus récente. Cette opération de révision utilise l'historique d'une séquence d'observations pour effectuer la révision.

Dans l'approche de Lehmann de la révision itérée [LEH 95], l'état épistémique de l'agent est une séquence d'observations l'opération de révision concatène une nouvelle observation à l'état épistémique courant.