Cours 2 : Raisonnement en logique modale

Odile PAPINI

POLYTECH
Université d'Aix-Marseille
odile.papini@univ-amu.fr
http://odile.papini.perso.esil.univmed.fr/sources/MASTER2-RE-OP.html

Plan du cours

Bibliographie 1 I

SMULLYAN R.M. , *First-order logic.*,
Springer-Verlag, 1968.

FITTING M. C., *Proofs methods for modal and intuitionistic logics*,
CO Dordecht, 1980.

D'AGOSTINO M. & GABBAY D. M. & HÄHNLE R.& POSEGGA J. , *Handbook of tableau methods*,
Springer-Verlag 1999.
books.google.fr/books ?isbn=0792356276

Bibliographie 2 I

Supports de cours tableaux pour la logique modale

http ://www.irit.fr/ Andreas.Herzig/CLmai/

http ://www.lipn.univ-paris13.fr/ levy/pdf/CoursLogMod.pdf

http ://www.lsv.ens-cachan.fr/ demri/tableaux-et-log-modales.pdf

Raisonnement : Méthode des tableaux

Méthode des tableaux

Pour prouver F : construction d'un arbre dont

- la racine est étiquetée par $\neg F$
- les noeuds sont étiquetés par des formules
- les successeurs des noeuds sont produits par des règles d'expansion.
- on ajoute $\Box$ à la fin d'un chemin $\mathcal{A}$ si :
  - $F_i \in \mathcal{A}$ et $\neg F_i \in \mathcal{A}$
  - $\perp \in \mathcal{A}$

Il existe plusieurs règles d'expansion pour construire les chemins

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique propositionnelle

règle-$\neg$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $\neg\top$

action :

prolongation : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\bot\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique propositionnelle

règle-$\neg$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $\neg\bot$

action :

prolongation : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\top\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique propositionnelle

règle-$\neg$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $\neg\neg F_i$

action :

prolongation : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{F_i\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique propositionnelle

règle-$\wedge$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $F_1 \wedge F_2$ et ne contient pas déja F_1 et F_2

action :

prolongation : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{F_1, F_2\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique propositionnelle

règle-$\wedge$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $\neg(F_1 \vee F_2)$

action :

prolongation : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\neg F_1, \neg F_2\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique propositionnelle

règle-$\wedge$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $\neg(F_1 \rightarrow F_2)$

action :

prolongation : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{F_1, \neg F_2\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique propositionnelle

règle-$\vee$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $F_1 \vee F_2$

action :

branchement : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{F_1\}$ et $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \cup \{F_2\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique propositionnelle

règle-$\vee$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $\neg(F_1 \wedge F_2)$

action :

branchement : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\neg F_1\}$ et $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \cup \{\neg F_2\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique propositionnelle

règle-$\vee$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $F_1 \rightarrow F_2$

action :

branchement : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\neg F_1\}$ et $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \cup \{F_2\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique propositionnelle

règle-$\vee$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $F_1 \leftrightarrow F_2$

action :

branchement : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{F_1,\ F_2\}$ et $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \cup \{\neg F_1,\ \neg F_2\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique propositionnelle

règle-$\vee$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $\neg(F_1 \leftrightarrow F_2)$

action :

branchement : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\neg F_1,\ F_2\}$ et $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \cup \{F_1,\ \neg F_2\}$

Méthode des tableaux

Exercice

Construction de tableaux

- $F = ((p \rightarrow q) \land p) \rightarrow q$
- $\{(p \lor \neg q) \land q\} \models p$

Méthode des tableaux

chemin complet

Un chemin $\mathcal{A}$ est complet si pour chaque règle d'expansion utilisée pour la constructon du chemin s'il s'agit d'une règle :

- de prolongation : si $F_1 \wedge F_2 \in \mathcal{A}$ alors F_1 et $F_2 \in \mathcal{A}$
- de ramification : si $F_1 \vee F_2 \in \mathcal{A}$ F_1 ou F_2 alors $\in \mathcal{A}$
- de négation :
  - si $\neg\neg F_i \in \mathcal{A}$ alors $F_i \in \mathcal{A}$
  - si $\neg\top \in \mathcal{A}$ alors $\bot \in \mathcal{A}$
  - si $\neg\bot \in \mathcal{A}$ alors $\top \in \mathcal{A}$

tableau complet

Un tableau est complet si tous les chemins sont complets

Méthode des tableaux

chemin fermé

Soit F_i une formule propositionnelle
Un chemin $\mathcal{A}$ est fermé (clos) si F_i et $\neg F_i$ figurent dans $\mathcal{A}$ ou si $\perp$ figure dans $\mathcal{A}$

chemin atomiquement fermé

Soit p une proposition
Un chemin $\mathcal{A}$ est atomiquement clos si p et $\neg p$ figurent dans $\mathcal{A}$ ou si $\perp$ figure dans $\mathcal{A}$

chemin ouvert

Un chemin ouvert est un chemin qui n'est pas fermé

Méthode des tableaux

tableau fermé

Un tableau est clos si tous les chemins sont atomiquement clos

tableau ouvert

Un tableau est ouvert si au moins un chemin est ouvert

chemin cohérent (ou satisfaisable)

Un chemin est cohérent si l'ensemble des formules qui le composent est cohérent

tableau cohérent (ou satisfaisable)

un tableau est cohérent si au moins un chemin est cohérent.

Méthode des tableaux

Proposition

Toute application d'une règle de prolongation ou de ramification sur un tableau cohérent produit un autre tableau cohérent

Proposition

S'il existe un tableau fermé pour un ensemble de formules propositionnelles $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ n'est pas satisfaisable (ou incohérent)

Méthode des tableaux

Exercice

Construction de tableau

$$\mathcal{F} = \{(p \vee q) \wedge (\neg p \rightarrow r),\ q \rightarrow \neg r,\ \neg p\}$$

Méthode des tableaux

Preuve par tableau

F une formule propositionnelle a une preuve par tableaux, si le tableau pour $\neg F$ est fermé

Théorème (adéquation et complétude)

F est une tautologie ssi F a une preuve par tableaux

Déduction avec tableaux

$\mathcal{F} \models F$ ssi le tableau pour $\mathcal{F} \cup \{\neg F\}$ est fermé

Méthode des tableaux

Exercice

- $F = ((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ est-elle satisfaisable ?
- $S = \{p \vee q,\ p \vee r,\ \neg q \vee \neg r,\ \neg p\}$ est-il satisfaisable ?
- En utilisant la méthode des tableaux, montrer que
  - $\{(p \vee \neg q) \wedge q\} \models p$?
  - $\{p \rightarrow r,\ q \rightarrow r\} \quad \models \quad (p \vee q) \rightarrow r$

Tableaux en logique modale propositionnelle

Méthode des tableaux sémantiques

formules modales : préfixées par des étiquettes qui “nomment” le monde dans lequel les formules sont supposées satisfaites.

formule préfixée : $\sigma\ F$ (σ est le préfixe : suite finie d'entiers positifs)

- $\sigma_0.\sigma_1$: préfixe obtenu par concaténation des préfixes σ_0 et σ_1
- $\sigma.n$: la suite σ suivie de n (n entier)
- $\sigma.n$ nomme un monde accessible par l'un des mondes nommé par σ.

Tableaux en logique modale propositionnelle

construction d'une preuve de F : construction d'un arbre dont

- **la racine** est étiquetée par la formule préfixée $1\ \neg F$
- les **noeuds** sont étiquetés par des formules préfixées
- les **descendants de noeuds** sont produits soit par des **règles d'expansion** (prolongation, ramification, double négation, nécessité, possibilité)

Tableaux en logique modale propositionnelle

règles de prolongation

représente la satisfaction de la formule $\sigma\ \alpha = \sigma\ \alpha_1 \ \wedge\ \sigma\ \alpha_2$

$$\frac{\sigma\ \alpha}{\begin{array}{c}\sigma\ \alpha_1\\ \sigma\ \alpha_2\end{array}} \qquad \frac{\sigma\ x \wedge y}{\begin{array}{c}\sigma\ x\\ \sigma\ y\end{array}} \qquad \frac{\sigma\ \neg(x \vee y)}{\begin{array}{c}\sigma\ \neg x\\ \sigma\ \neg y\end{array}} \qquad \frac{\sigma\ \neg(x \rightarrow y)}{\begin{array}{c}\sigma\ x\\ \sigma\ \neg y\end{array}} \qquad \frac{\sigma\ x \leftrightarrow y}{\begin{array}{c}\sigma\ x \rightarrow y\\ \sigma\ x \rightarrow y\end{array}}$$

Tableaux en logique modale propositionnelle

règles de ramification

représente la satisfaction de la formule $\sigma\ \beta = \sigma\ \beta_1\ \vee\ \sigma\ \beta_2$

$$\frac{\sigma\ \beta}{\sigma\ \beta_1 \quad \mid \quad \sigma\ \beta_2} \qquad \frac{\sigma\ x \vee y}{\sigma\ x \quad \mid \quad \sigma\ y} \qquad \frac{\sigma\ \neg(x \wedge y)}{\sigma\ \neg x \quad \mid \quad \sigma\ \neg y}$$

$$\frac{\sigma\ \neg(x \rightarrow y)}{\sigma\ \neg x \quad \mid \quad \sigma\ y} \qquad \frac{\sigma\ \neg(x \leftrightarrow y)}{\sigma\ \neg(x \rightarrow y) \quad \mid \quad \sigma\ \neg(y \rightarrow x)}$$

Tableaux en logique modale propositionnelle

règle de double négation

représente la satisfaction de la formule $\sigma\ \neg\neg\alpha = \sigma\ \alpha$

$$\frac{\sigma\ \neg\neg\alpha}{\sigma\ \alpha}$$

Tableaux en logique modale propositionnelle

règle de possibilité

le monde nommé par σ satisfait $\Diamond\alpha$ et il existe au moins un monde accéssible à partir du monde dont le nom est σ qui satisfait α

$$\frac{\sigma\ \Diamond\alpha}{\sigma.n\ \alpha} \qquad\qquad \frac{\sigma\ \neg\ \Box\alpha}{\sigma.n\ \neg\alpha}$$

Tableaux en logique modale propositionnelle

règle de nécessité

le monde nommé par σ satisfait $\Box\alpha$ et tous les mondes accéssibles à partir du monde dont le nom est σ satisfont α

$$\frac{\sigma\ \Box\alpha}{\sigma.n\ \alpha} \qquad \frac{\sigma\ \neg\ \Diamond\alpha}{\sigma.n\ \neg\alpha}$$

Tableaux en logique modale propositionnelle

F : une formule de la logique modale.

F a une preuve par tableaux si **le tableau pour** $1 \neg F$ **est fermé**

- un tableau est fermé si tous ses chemins sont fermés.
- un chemin est fermé si les formules préfixées $\sigma\ F$ et $\sigma\ \neg F$ apparaissent dans le chemin

Tableaux en logique modale propositionnelle

cours-SSI-P-II-cours-2.pdf — Partie II Cours 2 : Politique de sécurité

Précédente Suivante 67 (67 sur 72) 300 %

$$1\ \neg(\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)) \quad (1)$$

$$1\ \Box(p \wedge q) \quad (2)$$

$$1\ \neg(\Box p \wedge \Box q) \quad (3)$$

$1\ \neg\Box p \quad (4)$	$1\ \neg\Box q \quad (9)$
$1.1\ \neg p \quad (5)$	$1.1\ \neg q \quad (10)$
$1.1\ p \wedge q \quad (6)$	$1.1\ p \wedge q \quad (11)$
$1.1\ p \quad (7)$	$1.1\ p \quad (12)$
$1.1\ q \quad (8)$	$1.1\ q \quad (13)$

$$F = \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$$

Tableaux en logique modale propositionnelle

exercice

Les formules suivantes ont-elle une preuve par la méthode des tableaux ?

- $\Box p \rightarrow \Box\Box p$
- $\Box p \vee \Box\neg p$

Tableaux en logique modale propositionnelle

Autres règles de nécessité

$$T \quad \frac{\sigma\ \Box\alpha}{\sigma\ \alpha} \quad \frac{\sigma\ \neg\Diamond\alpha}{\sigma\ \neg\alpha}$$

$$D \quad \frac{\sigma\ \Box\alpha}{\sigma\ \Diamond\alpha} \quad \frac{\sigma\ \neg\Diamond\alpha}{\sigma\ \neg\Box\alpha}$$

$$B \quad \frac{\sigma.n\ \Box\alpha}{\sigma\ \alpha} \quad \frac{\sigma.n\ \neg\Diamond\alpha}{\sigma\ \neg\alpha}$$

$$4 \quad \frac{\sigma\ \Box\alpha}{\sigma.n\ \Box\alpha} \quad \frac{\sigma\ \neg\Diamond\alpha}{\sigma.n\ \neg\Diamond\alpha}$$

$$4r \quad \frac{\sigma.n\ \Box\alpha}{\sigma\ \Box\alpha} \quad \frac{\sigma.n\ \neg\Diamond\alpha}{\sigma\ \neg\Diamond\alpha}$$

$$D \quad \frac{\sigma\ \Box\alpha}{\sigma\ \Diamond\alpha} \quad \frac{\sigma\ \neg\Diamond\alpha}{\sigma\ \neg\Box\alpha}$$

Tableaux en logique modale propositionnelle

Règles d'expansion pour les systèmes formels

système formel	*règle*
D	D
T	T
$K4$	4
B	$B, 4$
$S4$	$T, 4$
$S5$	$T, 4, 4r$

Tableaux en logique modale propositionnelle

Théorème (adéquation et complétude)

F une formule de la logique modale propositionnelle est une tautologie ssi F a une preuve par tableaux

Tableaux en logique modale propositionnelle

Implantation

Des systèmes performants basés sur la **méthode des tableaux sémantiques**

- LoTREC
- TWB
- KSAT
- FaCT

Méthode des tableaux