

exercices : logique propositionnelle

Exercice 1 :

Soit les faits suivants :

- Si Pierre vient on joue aux cartes.
- Si Pierre et Jean viennent, il y a des disputes.
- Si on ne joue pas aux cartes, il n'y a pas de dispute.
- Pierre ne vient pas

- 1) Représenter en calcul propositionnel les quatre faits.
- 2) Peut-on déduire de ces quatre faits qu'il n'y aura pas de dispute ?

Exercice 2 :

Soit les faits suivants :

- Jean affirme : "Si Bernard est coupable, Sophie l'est aussi".
- Bernard dit : "Jean est coupable et Sophie ne l'est pas".
- Sophie assure : "Elle n'est pas coupable mais au moins l'un des deux autres protagonistes l'est".

On suppose que chacune des personnes ment si et seulement si elle est coupable.

- 1) Représenter en calcul propositionnel les trois affirmations.
- 2) Existe-il une interprétation qui satisfait les trois affirmations ?

Exercice 3 :

L'inspecteur Lafrite est chargé de l'enquête concernant un vol de tableaux dans une galerie d'art. Il a demandé à Relbou et Gremai, deux de ses adjoints de l'aider dans l'affaire. L'enquête a abouti à l'arrestation de quatre personnes : Jules Rasteau, Dériré Lagrange, Michel Boileau et Félicie Ossy. Les interrogatoires sont conduits par les deux adjoints qui viennent faire leur rapport :

F1) **Relbou** : Jules Rasteau est innocent mais je suis persuadé qu'au moins l'un des autres est coupable.

F2) **Gremai** : Si Dériré Lagrange est coupable, alors il n'a qu'un complice, qui est d'ailleurs parmi les autres.

F3) **Relbou** : Et si Michel Boileau est coupable, je pense qu'il a deux complices parmi les autres.

F4) **Lafrite** : Si je considère que ce que vous me dites est vrai, je peux affirmer la culpabilité de l'une des quatre personnes.

- 1) Représenter en calcul propositionnel les quatre affirmations F1, F2, F3, F4.
- 2) L'ensemble des faits $\mathcal{F} = \{F1, F2, F3, F4\}$ est-il cohérent ? Pouvez-vous aider les inspecteurs à trouver la personne coupable ?

Exercice 4 :

Soit trois personnes Pierre, Jacques et André dont on connaît les faits suivants :

F1) L'un des trois au moins est blond.

F2) Si Pierre est blond mais pas Jacques, alors André est blond.

F3) Si Jacques est blond alors Pierre ne l'est pas.

F4) Soit André et Jacques sont tous les deux blonds, soit ils ne le sont ni l'un, ni l'autre.

- 1) Représenter en calcul propositionnel les faits F1, F2, F3, F4.
- 2) L'ensemble des faits $\mathcal{F} = \{F1, F2, F3, F4\}$ est-il cohérent ? Peut-on répondre à la question suivante : Quel(les) est (sont) la (les) personne(s) bonde(s) ?

Exercice 5 :

On considère l'ensemble de clauses propositionnelles suivant :
 $C = \{C_1 = \neg a \vee \neg b, C_2 = a \vee \neg c, C_3 = c, C_4 = b \vee \neg d, C_5 = d \vee b\}$. Cet ensemble de clauses est-il cohérent ? Utiliser la résolution.

Exercice 6 :

Les axiomes suivants du calcul propositionnel sont-ils des tautologies ?

- A1) $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$
- A2) $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
- A3) $((\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow P))$

Exercice 7 :

Démontrer les propriétés suivantes :

- $\models (P \leftrightarrow Q)$ ssi $P \equiv Q$
- $\models (P \wedge Q)$ ssi $\models P$ et $\models Q$
- si $\models P$ ou $\models Q$ alors $\models (P \vee Q)$

Exercice 8 :

Est-ce que A est une conséquence logique de B :

- $B = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$ et $A = q \vee r$
- $B = (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg r)$ et $A = \neg p$

Exercice 9 :

Soit \otimes un connecteur propositionnel dont la table de vérité est :

x	y	$x \otimes y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exprimer les formules $\neg x, x \wedge y, x \vee y, x \rightarrow y, x \leftrightarrow y$, uniquement avec le connecteur \otimes

Exercice 10 :

Mette les formules propositionnelles suivantes sous forme normale conjonctive :

- 1) $p \vee (\neg p \vee q \wedge r)$
- 2) $(\neg p \wedge q) \vee (p \vee \neg q)$
- 3) $\neg(p \rightarrow q) \vee (p \vee q)$

Mette les formules propositionnelles suivantes sous forme normale disjonctive :

- 1) $p \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow s)$
- 2) $\neg(p \vee \neg q) \wedge (s \rightarrow t)$
- 3) $\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$

Exercice 11 :

- 1) Soit 2 variables propositionnelles, donner la formule propositionnelle exprimant que l'une des propositions (et une seule) est vraie parmi les 2 propositions. Mettre cette formule sous forme normale conjonctive.

- 2) Généraliser ce résultat à n variables propositionnelles, en donnant la forme normale conjonctive de la formule exprimant q'une proposition (et une seule) est vraie parmi les n propositions.
- 3) Appliquer ce résultat à l'énigme des témoins : a l'issue d'un hold-up, quatre employés d'une banque décrivent le signalement de l'agresseur :
- Selon l'hôtesse, il avait les yeux bleus, était de petite taille et portait une veste et un chapeau.
 - Selon le caissier, il avait les yeux noirs, était de petite taille et portait une veste et un chapeau.
 - Selon la secrétaire, il avait les yeux verts, était de taille moyenne et portait un imperméable et un chapeau.
 - Selon le directeur, il avait les yeux gris, était de grande taille et portait une veste et était nu tête.

Chaque témoin a décrit correctement un détail sur quatre. Par ailleurs, pour chaque détail, un témoin l'a décrit correctement.