

exercices corrigés : logique des prédicats

Exercice 1 : Traduire les énoncés suivants en logique des prédicats :

- 1) Tous les hommes sont méchants.
 $\forall x(h(x) \rightarrow m(x))$
- 2) Seulement les hommes sont méchants.
 $\forall x(m(x) \rightarrow h(x))$
- 3) Il existe des hommes méchants.
 $\exists x(h(x) \wedge m(x))$
- 4) Il existe un homme qui n'est pas méchant.
 $\exists x(h(x) \wedge \neg m(x))$
- 5) Il n'existe pas d'homme méchant.
 $\neg(\exists x(h(x) \wedge m(x)))$
- 6) Il existe un homme qui aime toutes les femmes.
 $\exists x(h(x) \wedge \forall y(f(y) \rightarrow aime(x, y)))$
- 7) Chaque chat connaît un chien qui le déteste.
 $\forall x(chat(x) \rightarrow \exists y(chien(y) \wedge connait(x, y) \wedge deteste(y, x)))$
- 8) Tous les poissons, sauf les requins, sont gentils avec les enfants.
 $\forall x(poisson(x) \wedge \neg requin(x) \rightarrow \exists y(enfant(y) \rightarrow gentil(x, y)))$
- 9) Tous les oiseaux ne peuvent pas voler.
 $\exists x(oiseau(x) \wedge \neg vole(x))$
- 10) Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde, ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.
 $(\forall x \exists y aime(x, y) \wedge \neg(\exists x \forall y aime(x, y))) \vee (\exists x \forall y aime(x, y) \wedge \exists x \forall y \neg aime(x, y))$
- 11) Il y a des gens que l'on peut rouler tout le temps et quelquefois on peut rouler tout le monde, mais on ne peut pas rouler tout le monde à chaque fois.
 $\exists x \forall t rouler(x, t) \wedge \exists t \forall x rouler(x, t) \wedge \forall t \forall x \neg rouler(x, t)$

12) N'importe qui peut apprendre la logique s'il travaille assez.

$$\forall x(\text{travaille} - \text{assez}(x) \rightarrow \text{apprend} - \text{logique}(x))$$

Exercice 2 : Traduire en français les formules suivantes :

- 1) $\forall x (E(x) \rightarrow (\exists y (C(y) \wedge \exists z (M(z) \wedge T(x, y, z))))$,
avec $E(x)$: x est étudiant, $C(y)$: y est un cours, $M(z)$: z est un mauvais enseignant, $T(x, y, z)$: x suit le cours y enseigné par z .

Tout étudiant suit un cours assuré par un mauvais enseignant

- 2) $\forall x \forall y \forall z (T(x) \wedge C(y, x) \wedge C(w, x) \wedge D(y, z) \wedge D(y, w)) \rightarrow G(f(g(y), g(z)), g(w))$,
avec $T(x)$: x est un triangle, $C(x, y)$: y est le côté de x , $D(x, y)$: x est différent de y , $G(x, y)$: x est plus grand que y , $f(x, y)$: somme de x et de y , $g(x)$: longueur de x .

Pour tout triangle dont les côtés sont distincts, la somme des longueurs de deux de ses côtés est supérieure à la longueur du troisième.

Exercice 3 : Soit l'interprétation :

$\mathcal{L} : \{ a, b : \text{constantes}, f : \text{symbole fonctionnel}, P : \text{symbole de prédicats} \}$

- $D : \{1, 2\}$
- $I_c(a) = 1, I_c(b) = 2, I_c(f(1)) = 2, I_c(f(2)) = 1, I_c(P(2, 1)) = 0, I_c(P(2, 2)) = 0, I_c(P(1, 2)) = 1, I_c(P(1, 1)) = 1.$

Etablir la valeur de vérité des formules suivantes :

On note $V : \text{Vrai}, F : \text{Faux}$

- 1) $I(P(a, f(a))) = I_c(p)(1, f(1)) = V.$
- 2) $I(P(b, f(b))) = I_c(p)(2, f(2)) = F.$
- 3) $I(\forall x, \forall y P(y, x)) = V$ ssi $I_{x/1}(P(y, x)) = V$ et $I_{x/2}(P(y, x)) = V.$
 $I_{x/1}(P(y, x)) = V$ ssi $I_{x/1 y/1}(P(y, x)) = V$ et $I_{x/1 y/2}(P(y, x)) = V$
 $I_{x/2}(P(y, x)) = V$ ssi $I_{x/2 y/1}(P(y, x)) = V$ et $I_{x/2 y/2}(P(y, x)) = V$
 Or, $\forall x I_c(P(2, x)) = F$ donc $I(\forall x, \forall y P(y, x)) = F$
- 4) $I(\forall x, \forall y P(y, x) \rightarrow P(f(x), f(y))) = V$ ssi $I_{x/1 y/1}(\neg P(x, y) \vee P(f(x), f(y))) = V$ et $I_{x/1 y/2}(\neg P(x, y) \vee P(f(x), f(y))) = V$ et $I_{x/2 y/1}(\neg P(x, y) \vee P(f(x), f(y))) = V$ et $I_{x/2 y/2}(\neg P(x, y) \vee P(f(x), f(y))) = V.$
 Or, $I_{x/1 y/1}(\neg P(x, y) \vee P(f(x), f(y))) = I_c(P(1, 1) \vee P(f(1), f(1))) = F$
 donc $I(\forall x, \forall y P(y, x) \rightarrow P(f(x), f(y))) = F$

Exercice 4 :

1) Représenter en logique des prédicats les énoncés H1, H2, H3, H4, H5, C.

H1 : Pour tout crime, il y a quelqu'un qui l'a commis.

$$\forall x (\text{crime}(x) \rightarrow \exists y \text{ commis}(y, x))$$

H2 : Seuls les gens malhonnêtes commettent des crimes.

$$\forall y \forall x (\text{crime}(x) \wedge \text{commis}(y, x) \rightarrow \text{malhonnete}(y))$$

H3 : Ne sont arrêtés que des gens malhonnêtes.

$$\forall y (\text{arrete}(y) \rightarrow \text{malhonnete}(y))$$

H4 : Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes.

$$\forall y (\text{malhonnete}(y) \wedge \text{arrete}(y)) \rightarrow \exists x (\text{crime}(x) \wedge \text{commis}(y, x))$$

H5 : Il y a des crimes.

$$\exists x \text{ crime}(x)$$

C : Il y a des gens malhonnêtes non arrêtés.

$$\exists y (\text{malhonnete}(y) \wedge \neg \text{arrete}(y))$$

2) Donner les formes de Skolem correspondant aux énoncés H1, H2, H3, H4, H5.

H1 : $\neg \text{crime}(x) \vee \text{commis}(f(x), x)$

H2 : $\neg \text{crime}(x) \vee \neg \text{commis}(y, x) \vee \text{malhonnete}(y)$

H3 : $\neg \text{arrete}(y) \vee \text{malhonnete}(y)$

H4 : $\neg \text{malhonnete}(y) \vee \neg \text{arrete}(y) \vee \neg \text{crime}(x) \vee \neg \text{commis}(y, x)$

H5 : $\text{crime}(a)$

3) A-t-on $\{H1, H2, H3, H4, H5\} \models C$? Utiliser la résolution.

$\{H1, H2, H3, H4, H5\} \models C$ ssi $\{H1, H2, H3, H4, H5\} \cup \{\neg C\}$
incohérent

6) : $\neg C : \neg(\exists y \text{ malhonnete}(y) \wedge \neg \text{arrete}(y)) =$

$$\forall y \neg \text{malhonnete}(y) \vee \text{arrete}(y)$$

skolémisation : clause prédicative (6) $\neg \text{malhonnete}(y) \vee \text{arrete}(y)$

(H1) et (H5) avec $\sigma(x) = a$: résolvante (7) $\text{commis}(f(a), a)$

(7) et (H2) avec $\sigma(x) = a$ et $\sigma(y) = f(a)$:

résolvante (8) $\neg \text{crime}(a) \vee \text{malhonnete}(f(a))$

(8) et (5) : résolvante (9) $\text{malhonnete}(f(a))$

(7) et (4) avec $\sigma(x) = a$ et $\sigma(y) = f(a)$:

résolvante (10) $\neg \text{malhonnete}(f(a)) \vee \neg \text{arrete}(f(a)) \vee \neg \text{crime}(a)$

(10) et (5) : résolvante (11) $\neg \text{malhonnete}(f(a)) \vee \neg \text{arrete}(f(a))$

(11) et (9) : résolvante (12) $\neg \text{arrete}(a)$

(12) et (6) : résolvante (13) $\neg \text{malhonnete}(f(a))$

(13) et (9) : résolvante (14) \square : clause vide

donc $\{H1, H2, H3, H4, H5\} \cup \{\neg C\}$ est incohérent, donc $\{H1, H2, H3, H4, H5\} \models$

C.

Exercice 5 :

Soit l'ensemble de formules $\mathcal{F} = \{\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \forall x(q(x) \rightarrow r(x)),\}$ et la formule $F = \forall x(p(x) \rightarrow r(x))$. Est-ce que $\{\mathcal{F}\} \models \mathcal{F}$? Utiliser la résolution.

$\{\mathcal{F}\} \models \mathcal{F}$ ssi $\{\mathcal{F}\} \cup \{\neg\mathcal{F}\}$ incohérent Skolémisation :

$$1) : \neg p(x) \vee q(x)$$

$$2) : \neg q(x) \vee r(x)$$

$$\neg F : p(a) \wedge \neg r(a)$$

4 clauses

$$1) : \neg p(x) \vee q(x)$$

$$2) : \neg q(x) \vee r(x)$$

$$3) : p(a)$$

$$4) : \neg r(a)$$

$$1) \text{ et } 3) \text{ avec } \sigma(x) = a \text{ résolovante } 5) : q(a)$$

$$2) \text{ et } 4) \text{ avec } \sigma(x) = a \text{ résolovante } 6) : \neg q(a)$$

$$5) \text{ et } 6) \text{ résolovante } 7) : \square : \text{ clause vide}$$

$$\text{donc } \{\mathcal{F}\} \cup \{\neg\mathcal{F}\} \text{ incohérent et } \{\mathcal{F}\} \models \mathcal{F}.$$

Exercice 6 :

Soit les énoncés suivants :

$$F1 : \forall x \forall y \forall z (F(x, y) \wedge F(y, z)) \rightarrow G(x, z)$$

$$F2 : \forall x \exists y F(y, x)$$

$$F3 : \neg \forall x \exists y G(y, x)$$

L'ensemble $\{F1, F2, F3\}$ est-il cohérent ? Utiliser la méthode de résolution.

Résultat de la skolémisation :

$$F1 : \neg F(x, y) \vee \neg F(y, z) \vee G(x, z)$$

on renomme x en x'

$$F2 : F(f(x'), x')$$

on renomme y en y'

$$F3 : \neg G(y', a)$$

Résolution

$$F1 \text{ et } F3 \text{ avec } \sigma(z) = a \text{ et } \sigma(x) = y' \text{ résolovante (4) : } \neg F(y', y) \vee \neg F(y, a)$$

$$F2 \text{ et (4) avec } \sigma(x') = a \text{ et } \sigma(y) = f(x') \text{ résolovante (5) : } \neg F(y', f(a))$$

$$F2 \text{ et (5) avec } \sigma(x') = f(a) \text{ et } \sigma(y') = f(x') \text{ résolovante (6) : } \square : \text{ clause vide}$$

L'ensemble $\{F1, F2, F3\}$ est incohérent