MASTER SIS.Tronc commun
Logique et représentation des connaissances .
Université de la Méditerranée
Année universitaire 2010/2011

Odile Papini

exercices corrigés : logique propositionnelle

Exercice 1 **:**

Soit les faits suivants :

- Si Pierre vient on joue aux cartes.
- Si Pierre et Jean viennent, il y a des disputes.
- Si on ne joue pas aux cartes, il n'y a pas de dispute.
- Pierre ne vient pas

1) Représenter en calcul propositionnel les quatre faits.

   – $F_1 : p \to c$
   – $F_2 : (p \wedge j) \to d$
   – $F_3 : \neg c \to \neg d$
   – $F_4 : \neg p$

2) Peut-on déduire de ces quatre faits qu'il n'y aura pas de dispute ?

   $\{F_1, F_2, F_3, F_4\} \models \neg d$?

   1- Est-ce que toutes les interprétations qui satisfont $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ satisfont $\neg d$? Non, $\{c, d, j, \neg p, \}$ (autre notation (1110)) ou $\{c, d, \neg j, \neg p\}$ (autre notation (1100)) satisfont $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ mais pas $\neg d$.

   2- avec la résolution $\{F_1, F_2, F_3, F_4\} \cup \{d\}$ est incohérent ?

   mise sous forme clausale : $\{C_1 = \neg p \vee c, C_2 = \neg p \vee \neg j \vee d, C_3 = c \vee \neg d, C_4 = \neg p, C_5 = d\}$

   Résolution :

   C_5 et C_3 : $C_6 = c$

   C_3 et C_2 : $C_7 = \neg p \vee \neg j \vee c$

   On ne peut plus appliquer la résolution et on n'a pas produit la clause vide donc $\{F_1, F_2, F_3, F_4\} \cup \{d\}$ est cohérent donc on ne peut pas déduire qu'il n'y aura pas de dispute

Exercice 2 **:**

Soit les faits suivants :

- Jean affirme : "Si Bernard est coupable, Sophie l'est aussi".

- Bernard dit : "Jean est coupable et Sophie ne l'est pas".
- Sophie assure : "Elle n'est pas coupable mais au moins l'un des deux autres protagonistes l'est".

On suppose que chacune des personne ment si et seulement si elle est coupable.

1) Représenter en calcul propositionnel les trois affirmations.

   - F_1 : $(\neg j \to (b \to s)) \wedge (j \to (\neg(b \to s)))$
   - F_2 : $(\neg b \to (j \wedge \neg s)) \wedge (b \to (\neg(j \wedge \neg s)))$
   - F_3 : $(\neg s \to (\neg s \wedge (j \vee b))) \wedge (s \to (\neg(\neg s \wedge (j \vee b))))$

2) Existe-il une interprétation qui satisfait les trois affirmations ?

   oui $\{b, \neg j, s\}$ (autre notation (101)) Jean est innocent et Bernard et Sophie sont coupables.

Exercice 3 :

L'inspecteur Lafrite est chargé de l'enquête concernant un vol de tableaux dans une galerie d'art. Il a demandé à Relbou et Gremai, deux de ses adjoints de l'aider dans l'affaire. L'enquête a abouti à l'arrestation de quatre personnes : Jules Rasteau, Dériré Lagrange, Michel Boileau et Félicie Ossy. Les interrogatoires sont conduits par les deux adjoints qui viennent faire leur rapport :

F1) **Relbou :** Jules Rasteau est innocent mais je suis persuadé qu'au moins l'un des autres est coupable.

F2) **Gremai :** Si Dériré Lagrange est coupable, alors il n'a qu'un complice, qui est d'ailleurs parmi les autres.

F3) **Relbou :** Et si Michel Boileau est coupable, je pense qu'il a deux complices parmi les autres.

F4) **Lafrite :** Si je considère que ce que vous me dites est vrai, je peux affirmer la culpabilité de l'une des quatre personnes.

1) Représenter en calcul propositionnel les quatre affirmations F1, F2, F3, F4.

   F1) $\neg j \wedge (d \vee m \vee f)$

   F2) $d \to (j \wedge \neg m \wedge \neg f) \vee (\neg j \wedge m \wedge \neg f) \vee (\neg j \wedge \neg m \wedge f)$

   F3) $m \to (j \wedge d \wedge \neg f) \vee (\neg j \wedge \neg d \wedge f) \vee (\neg j \wedge d \wedge f)$

   F4) $(F1 \wedge F2 \wedge F3) \to (j \wedge \neg m \wedge \neg f \wedge \neg d) \vee (\neg j \wedge m \wedge \neg f \wedge \neg d) \vee (\neg j \wedge \neg m \wedge f \wedge \neg d) \vee (\neg j \wedge \neg m \wedge \neg f \wedge d)$

2) L'ensemble des faits $\mathcal{F} = \{F1,\ F2,\ F3,\ F4\}$ est-il cohérent ? Pouvez-vous aider les inspecteurs à trouver la personne coupable ?

   $\mathcal{F} = \{F1,\ F2,\ F3,\ F4\}$ est cohérent $\{\neg d, f, \neg j, \neg m\}$ (autre notation (0100)) Félicie est coupable Jules, Désiré, Michel sont innocents.

Exercice 4 **:**

Soit trois personnes Pierre, Jacques et André dont on connaît les faits suivants :

F1) L'un des trois au moins est blond.

F2) Si Pierre est blond mais pas Jacques, alors André est blond.

F3) Si Jacques est blond alors Pierre ne l'est pas.

F4) Soit André et Jacques sont tous les deux blonds, soit ils ne le sont ni l'un, ni l'autre.

1) Représenter en calcul propositionnel les faits F1, F2, F3, F4.

   F1) $p \vee j \vee a$

   F2) $(p \wedge \neg j) \rightarrow a$

   F3) $j \rightarrow \neg p$

   F4) $(a \wedge j) \vee (\neg a \wedge \neg j)$

2) L'ensemble des faits $\mathcal{F} = \{F1,\ F2,\ F3,\ F4\}$ est-il cohérent ? $\mathcal{F} = \{F1,\ F2,\ F3,\ F4\}$ est cohérent, l'interprétation $\{a, j, \neg p\}$ (autre notation (110))

   Peut-on répondre à la question suivante : Quel(les) est (sont) la (les) personne(s) bonde(s) ?

   Jacques et André sont blonds

Exercice 5 **:**

On considère l'ensemble de clauses propositionnelles suivant :
$C = \{C_1 = \neg a \vee \neg b,\ C_2 = a \vee \neg c,\ C_3 = c,\ C_4 = b \vee \neg d,\ C_5 = d \vee b\}$. Cet ensemble de clauses est-il cohérent ? Utiliser la résolution.

Avec la résolution :
C_1 et C_2 : résolvante $C_7 = \neg b \vee \neg c$
C_7 et C_3 : résolvante $C_8 = \neg b$
C_8 et C_4 : résolvante $C_9 = \neg d$
C_9 et C_5 : résolvante $C_{10} = b$
C_8 et C_{10} : résolvante $\square$ (clause vide) donc C est incohérent.

Avec une méthode énumérative : la méthode de Davis et Putnam

$C = \{C_1 = \neg a \vee \neg b,\ C_2 = a \vee \neg c,\ C_3 = c,\ C_4 = b \vee \neg d,\ C_5 = d \vee b\}$.

On choisit la clause mono-littérale c, et $S_c = \{c\}$, $S_{\neg c} = \{a \vee \neg c\}$, $S'' = \{\neg a \vee \neg b, b \vee \neg d, d \vee b\}$ et $S'_c = \{\Box\}$, $S'_{\neg c} = \{a\}$, donc C est incohérent ssi $S'_c \cup S''$ et $S'_{\neg c} \cup S''$ sont incohérents. $S'_c \cup S''$ est incohérent car il contient la clause vide.

On continue avec $S'_{\neg c} \cup S'' = \{a, \neg a \vee \neg b, b \vee \neg d, d \vee b\}$. On choisit la clause mono-littérale a, et $S_a = \{a\}$, $S_{\neg a} = \{\neg a \vee \neg b\}$, $S'' = \{b \vee \neg d, d \vee b\}$ et $S'_a = \{\Box\}$, $S'_{\neg a} = \{\neg b\}$, donc C est incohérent ssi $S'_a \cup S''$ et $S'_{\neg a} \cup S''$ sont incohérents. $S'_a \cup S''$ est incohérent car il contient la clause vide.

On continue avec $S'_{\neg a} \cup S'' = \{\neg b, b \vee \neg d, d \vee b\}$. On choisit la clause mono-littérale $\neg b$, et $S_{\neg b} = \{\neg b\}$, $S_b = \{b \vee \neg d, d \vee b\}$, $S'' = \emptyset$ et $S'_{\neg b} = \{\Box\}$, $S'_b = \{\neg d, d\}$, donc C est incohérent ssi $S'_{\neg b}$ et S'_b sont incohérents. $S'_{\neg b}$ est incohérent car il contient la clause vide.

On continue avec $S'_b = \{\neg d, d\}$ $S_{\neg d} = \{\neg d\}$, $S_d = \{d\}$, $S'' = \emptyset$ et $S'_{\neg d} = \{\Box\}$, $S'_d = \{\Box\}$, donc C est incohérent ssi $S'_{\neg d}$ et S'_d sont incohérents. Or $S'_{\neg d}$ est incohérent il contient la clause vide et S'_d est incohérent il contient la clause vide. Donc C est incohérent.

Exercice 6 **:**

Les axiomes suivants du calcul propositionnel sont-ils des tautologies ?

A_1) $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$

Deux variables propositionnelles apparaissent dans A1, il y a 4 interprétations,

$\omega_0 = \{\neg P, \neg Q\}$ (autre notation (00)), $\omega_1 = \{\neg P, Q\}$ (autre notation (01)), $\omega_2 = \{P, \neg Q\}$ (autre notation (10)), $\omega_3 = \{P, Q\}$ (autre notation (11)).

$\forall\, i,\ 0 \leq i \leq 3,\ \omega_i(A_1) = 1$.

table de vérité :

ω_i	P	Q	$Q \rightarrow P$	$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
ω_0	0	0	1	1
ω_1	0	1	0	1
ω_2	1	0	1	1
ω_3	1	1	1	1

A_2) $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)))$

Trois variables propositionnelles apparaissent dans A_2, il y a 8 interprétations,

$\omega_0 = \{\neg P, \neg Q, \neg R\}$ (autre notation (000)), $\omega_1 = \{\neg P, \neg Q, R\}$ (autre notation (001)), $\omega_2 = \{\neg P, Q, \neg R\}$ (autre notation (010)), $\omega_3 = \{\neg P, Q, R\}$ (autre notation (011)), $\omega_4 = \{P, \neg Q, \neg R\}$ (autre notation (100)), $\omega_5 = \{P, \neg Q, R\}$ (autre notation (101)), $\omega_6 = \{P, Q, \neg R\}$ (autre notation (110)), $\omega_7 = \{P, Q, R\}$ (autre notation (111)).

$\forall\, i,\ 0 \leq i \leq 7,\ \omega_i(A_2) = 1$.

$A_3)$ $\quad ((\neg\, P \to \neg\, Q) \to (Q \to P))$

Deux variables propositionnelles apparaissent dans A_3, il y a 4 interprétations, $\omega_0 = \{\neg P, \neg Q\}$ (autre notation (00)), $\omega_1 = \{\neg P, Q\}$ (autre notation (01)), $\omega_2 = \{P, \neg Q\}$ (autre notation (10)), $\omega_3 = \{P, Q\}$ (autre notation (11)).

$\forall\, i,\ 0 \leq i \leq 3,\ \omega_i(A_3) = 1.$

Exercice 7 **:**

On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des interprétations.
Démonter les propriétès suivantes :

- $\models (P \leftrightarrow Q)$ ssi $P \equiv Q$

  si $\models (P \leftrightarrow Q)$ alors $\forall \omega \in \mathcal{W}$, $\omega(P \leftrightarrow Q) = 1$. Or si $\omega(P \leftrightarrow Q) = 1$ soit $\omega(P) = 0$ et $\omega(Q) = 0$, soit $\omega(P) = 1$ et $\omega(Q) = 1$ donc tout modèle de P est un modèle de Q et tout modèle de Q est un modèle de P donc $P \equiv Q$.

  si $P \equiv Q$ alors $P \models Q$ et $Q \models P$ donc $\forall \omega$ tel que $\omega(P) = 1$ alors $\omega(Q) = 1$ et $\forall \omega$ tel que $\omega(Q) = 1$ alors $\omega(P) = 1$. Supposons qu'il existe ω' tel que $\omega'(P \leftrightarrow Q) = 0$ alors soit $\omega'(P) = 1$ et $\omega'(Q) = 0$ soit $\omega'(P) = 0$ et $\omega'(P) = 1$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse ($P \models Q$ et $Q \models P$) donc $\models (P \leftrightarrow Q)$.

- $\models (P \wedge Q)$ ssi $\models P$ et $\models Q$

  $\models (P \wedge Q)$ ssi $\forall \omega \in \mathcal{W}$, $\omega(P \wedge Q) = 1$ ssi $\omega(P) = 1$ et $\omega(Q) = 1$ donc $\models P$ et $\models Q$.

- si $\models P$ ou $\models Q$ alors $\models (P \vee Q)$

  si $\models P$ alors $\forall \omega \in \mathcal{W}$, $\omega(P) = 1$ donc $\omega(P \vee Q) = 1$ donc $\models (P \vee Q)$.

  si $\models Q$ alors $\forall \omega \in \mathcal{W}$, $\omega(Q) = 1$ donc $\omega(P \vee Q) = 1$ donc $\models (P \vee Q)$.

Exercice 8 **:**

Est-ce que A est une conséquence logique de B :

$B \models A$? $\forall \omega \in \mathcal{W}$ si $\omega(B)$ alors $\omega(A)$, en d'autres termes, $Mod(B) \subseteq Mod(A)$. On écrit les interprtations dans l'ordre de décomposition des entiers en base 2 : $\omega_0 = (000)$, $\omega_1 = (001)$, $\cdots$ $\omega_7 = (111)$

- $B = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$ et $A = q \vee r$

  $Mod(B) = \{\omega_1, \omega_6, \omega_7\}$

  $Mod(A) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$

  $Mod(B) \subseteq Mod(A)$ donc $B \models A$.

- $B = (p \to q) \vee (p \to \neg r)$ et $A = \neg p$

  $Mod(B) = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7\}$

  $Mod(A) = \{\omega_4, \omega_6, \omega_5, \omega_7\}$

  $Mod(B) \not\subseteq Mod(A)$ donc $B \not\models A$.

Exercice 9 **:**

Soit $\otimes$ un connecteur propositionnel dont la table de vérité est :

x	y	$x \otimes y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exprimer les formules $\neg x$, $x \wedge y$, $x \vee y$, $x \rightarrow y$, $x \leftrightarrow y$, uniquement avec le connecteur $\otimes$

$\neg x = x \otimes x$

x	x	$x \otimes x$	$\neg x$
0	0	1	1
1	1	0	0

$x \vee y = (x \otimes x) \otimes (y \otimes y)$

x	y	$x \vee y$	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \otimes \neg y$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1

$x \wedge y = (x \otimes y) \otimes (x \otimes y)$

x	y	$x \wedge y$	$x \otimes y$	$\neg(x \otimes y)$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	1

$x \rightarrow y = (x \otimes (y \otimes y))$

x	y	$x \rightarrow y$	x	$\neg y$	$x \otimes \neg y$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

$x \leftrightarrow y = (x \otimes y) \otimes ((x \otimes x) \otimes (y \otimes y))$

x	y	$x \leftrightarrow y$	$x \otimes y$	$\neg x$	$\neg y$	$\neg y \otimes \neg y$
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1

Exercice 10 :

Mette les formules propositionnelles suivantes sous forme normale conjonctive (CNF) :

1) $p \vee (\neg p \vee q \wedge r)$ CNF : $(p \vee r)$

2) $(\neg p \wedge q) \vee (p \vee \neg q)$ CNF : $Vrai$ ou $\top$

3) $\neg(p \rightarrow q) \vee (p \vee q)$ CNF : $p \vee q$

Mette les formules propositionnelles suivantes sous forme normale disjonctive (DNF):

1) $p \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow s)$ DNF : $\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$

2) $\neg(p \vee \neg q) \wedge (s \rightarrow t)$ DNF :$(\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge t)$

3) $\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$ DNF : $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$

Exercice 11 :

1) Soit 2 variables propositionnelles, donner la formule propositionnelle exprimant que l'une des propositions (et une seule) est vraie parmi les 2 propositions. Mettre cette formule sous forme normale conjonctive.

   $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$ CNF : $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$

2) Généraliser ce résultat à n variables propositionnelles, en donnant la forme normale conjonctive de la formule exprimant q'une proposition (et une seule) est vraie parmi les n propositions.

   Une clause n-aire et $(n(n-1)/2$ clauses binaires d'exclusion mutuelle

   $(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n) \wedge (\neg a_1 \vee \neg a_2) \wedge (\neg a_1 \vee \neg a_3) \wedge \cdots \wedge (\neg a_{n-1} \vee \neg a_n)$

3) Appliquer ce résultat à l'énigme des témoins : a l'issue d'un hold-up, quatre employès d'une banque décrivent le signalement de l'agresseur :

   – Selon l'hôtesse, il avait les yeux bleus, était de grande taille et portait une veste et un chapeau.
   – Selon le caissier, il avait les yeux noirs, était de petite taille et portait une veste et un chapeau.
   – Selon la secrétaire, il avait les yeux verts, était de taille moyenne et portait un imperméable et un chapeau.
   – Selon le directeur, il avait les yeux gris, était de grande taille et portait une veste et était nu tête.

Chaque témoin a décrit correctement un détail sur quatre. Par ailleus, pour chaque détail, un témoin l'a décrit correctement.

Ensemble de clauses :

$\neg yeux - bleus \vee \neg grand$
$\neg yeux - bleus \vee \neg porte - veste$
$\neg yeux - bleus \vee \neg porte - chapeau$
$\neg grand \vee \neg porte - veste$
$\neg grand \vee \neg porte - chapeau$
$\neg porte - veste \vee \neg porte - chapeau$

$\neg yeux - noirs \vee \neg petit$
$\neg yeux - noirs \vee \neg porte - veste$
$\neg yeux - noirs \vee \neg porte - chapeau$
$\neg petit \vee \neg porte - veste$
$\neg petit \vee \neg porte - chapeau$

$\neg yeux - verts \vee \neg moyen$
$\neg yeux - verts \vee \neg porte - impermeable$
$\neg yeux - verts \vee \neg porte - chapeau$
$\neg moyen \vee \neg porte - impermeable$
$\neg moyen \vee \neg porte - chapeau$
$\neg porte - impermeable \vee \neg porte - chapeau$

$\neg yeux - gris \vee \neg grand$
$\neg yeux - gris \vee \neg porte - veste$
$\neg yeux - gris \vee \neg nu - tete$
$\neg grand \vee \neg porte - veste$
$\neg grand \vee \neg nu - tete$
$\neg porte - veste \vee \neg nu - tete$

$yeux - bleus \wedge yeux - noirs \wedge yeux - verts \wedge yeux - gris$
$\neg yeux - bleus \wedge \neg yeux - noirs$
$\neg yeux - bleus \wedge \neg yeux - verts$
$\neg yeux - bleus \wedge \neg yeux - gris$
$\neg yeux - noirs \wedge \neg yeux - verts$
$\neg yeux - noirs \wedge \neg yeux - gris$
$\neg yeux - verts \wedge \neg yeux - gris$

$grand \vee moyen \vee petit$
$\neg grand \vee \neg moyen$
$\neg grand \vee \neg petit$
$\neg moyen \vee \neg petit$

$porte - veste \vee porte - impermeable$

$\neg porte - veste \vee \neg porte - impermeable$

$porte - chapeau \vee nu - tete$
$\neg porte - chapeau \vee \neg nu - tete$

$yeus - bleus \wedge grand \wedge poste - veste \wedge porte - chapeau$
$yeus - noirs \wedge petit \wedge poste - veste \wedge porte - chapeau$
$yeus - verts \wedge moyen \wedge poste - impermeable \wedge porte - chapeau$
$yeus - gris \wedge grand \wedge poste - veste \wedge nu - tete$

Cet ensemble de clauses est cohérent, interprétation :
$\{yeux{-}bleus, \neg yeux{-}noirs, \neg yeux{-}verts, \neg yeux{-}gris, \neg grand, \neg moyen, petit,$
$\neg porte - veste, porte - impermeable, \neg porte - chapeau, nu - tete\}$

signalement de l'agresseur :
$yeux - bleus$, $petit$, $porte - impermeable$, $nu - tete$