R13
Cours 3 : Fusion de bases de croyances

Odile PAPINI & Eric Würbel

LSIS
Université d'Aix-Marseille, POLYTECH

odile.papini@univ-amu.fr

http://odile.papini.perso.luminy.univ-amu.fr/sources/MASTER2-RE.html

Plan du cours

1. Introduction
2. Approches bassées sur les modèles
   - Postulats
   - opérateurs basés sur une distance
3. Approches basées sur les formules
   - Postulats
   - opérateurs

Fusion : introduction

But de la fusion

Contexte :

- les informations proviennent de plusieurs sources,
- l'ensemble de ces informations peut s'avérer contradictoire

la fusion a pour but de déterminer les informations fiables en :

- exploitant les complémentarités entre sources
- résolvant les éventuels conflits,
- réduisant l'imprécision et l'incertitude,
- supprimant les redondances.

Fusion : définition

E : *profil* i.e. multi-ensemble non vide de bases de croyances cohérentes $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$
$\mathcal{E}$: ensemble de profils
$\mathcal{K}$: ensemble de bases de croyances propositionnelles
μ : formule propositionnelle *contrainte d'integrité* (IC)

opération de fusion Δ :

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{E} \times \mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{K} \\ E, \mu & \rightarrow & \Delta_\mu(E) \end{array}$$

Fusion : définition

Notations

$K = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \qquad \bigwedge K = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n.$

K est cohérente si $\bigwedge K$ est cohérente

$E = \{K_1, \ldots, K_n\} \qquad \bigwedge E : \bigwedge K_1 \wedge \ldots \wedge \bigwedge K_n$

E est cohérent si $\bigwedge E$ est cohérent

$\mathcal{M}od(E) = \{\mathrm{Mod}(K_1), \ldots, \mathrm{Mod}(K_n)\}$

Fusion : définition

point de vue sémantique

Recherche des modèles de μ les plus “proches” des modèles de E

Proximité

$\mathcal{P}$: ensemble de propositions

distance

$$\begin{array}{ccc} 2^{\mathcal{P}} \times 2^{\mathcal{P}} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \omega, \omega' & \rightarrow & d(\omega, \omega') \end{array}$$

par exemple distance de Hamming :

$$d(\omega, \omega') = \sharp\{i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \text{ tq } \omega_i \neq \omega'_i\}$$

Fusion sémantique

Postulats IC

(IC0) $\Delta_\mu(E) \models \mu$

(IC1) si μ est cohérent, alors $\Delta_\mu(E)$ est cohérent

(IC2) si $\bigwedge E$ est cohérent avec μ, alors $\Delta_\mu(E) = \bigwedge E \wedge \mu$

(IC3) si $E_1 \equiv E_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors $\Delta_{\mu_1}(E_1) \equiv \Delta_{\mu_2}(E_2)$

(IC4) si $K_1 \models \mu$ et $K_2 \models \mu$, alors
$\Delta_\mu(\{K_1, K_2\}) \wedge K_1$ est cohérent si et seulement si
$\Delta_\mu(\{K_1, K_2\}) \wedge K_2$ est cohérent

(IC5) $\Delta_\mu(E_1) \wedge \Delta_\mu(E_2) \models \Delta_\mu(E_1 \sqcup E_2)$

(IC6) si $\Delta_\mu(E_1) \wedge \Delta_\mu(E_2)$ est cohérent,
alors $\Delta_\mu(E_1 \sqcup E_2) \models \Delta_\mu(E_1) \wedge \Delta_\mu(E_2)$

(IC7) $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$

(IC8) si $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ est cohérent, alors $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \Delta_{\mu_1}(E)$

Théorème de représentation

assignation syncrétique

application : $E \rightarrow \leq_E$ qui associe à un profil un pre-ordre sur les interprétations vérifiant les conditions :

(1) si $\omega \models E$ et $\omega' \models E$ alors $\omega \approx_E \omega'$
(2) si $\omega \models E$ et $\omega' \not\models E$ alors $\omega <_E \omega'$
(3) si $E_1 \equiv E_2$ alors $\leq_{E_1} = \leq_{E_2}$
(4) $\forall \omega \models K$, $\exists \omega' \models K'$, $\omega' \leq_{K \sqcup K'} \omega$
(5) si $\omega \leq_{E_1} \omega'$ et $\omega \leq_{E_2} \omega'$ alors $\omega \leq_{E_1 \sqcup E_2} \omega'$
(6) si $\omega <_{E_1} \omega'$ et $\omega \leq_{E_2} \omega'$ alors $\omega \leq_{E_1 \sqcup E_2} \omega'$

Théorème de représentation

Théorème

Un operateur Δ_μ est un opérateur de fusion satisfaisant les postulats $\mathrm{IC0} - \mathrm{IC8}$ si et seulement si il existe une assignation syncrétique d'un profil E vers un pre-ordre total $\leq_E$ tel que $\mathrm{Mod}(\Delta_\mu(E)) = min(\mathrm{Mod}(\mu), \leq_E)$

Opérateurs basés sur une distance

(pseudo-)distance

Une (pseudo-)distance entre interprétations est une fonction d :

- $d(\omega, \omega') = d(\omega', \omega)$
- $d(\omega, \omega') = 0$ si et seulement si $\omega = \omega'$

fonction d'aggrégation

Une fonction f de ${\mathbb{R}^+}^n$ vers $\mathbb{R}^+$ telle que :

- Si $x \leq y$ alors $f(x_1, \cdots, x, \cdots x_n) \leq f(x_1, \cdots, y, \cdots x_n)$ monotonie
- $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n = 0$
- $f(x) = x$

Opérateurs basés sur une distance

opérateur de fusion

Soit d une distance et f une fonction d'agrégation
Un operateur de fusion basé sur une distance est défini par

$$\mathrm{Mod}(\Delta_{\mu}^{d,f}(E)) = min(\mathrm{Mod}(\mu), \leq_E)$$

, où le pré-ordre sur les interprétations $\leq_E$ est défini par :

- $\omega \leq_E \omega'$ si et seulement si $d(\omega, E) \leq d(\omega', E)$,
- $d(\omega, E) = f(d(\omega, K_1), \cdots, d(\omega, K_n))$, avec $E = \{K_1, \cdots, K_n\}$,
- $d(\omega, K) = min_{\omega \models K} d(\omega, \omega')$

Opérateurs basés sur une distance

exemples de distances

- d_H : distance de Hamming :
  $d_H(\omega, \omega') = \sharp\{i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \mathrm{tq}\ \omega_i \neq \omega'_i\}$
- d_D : distance drastique :
  $d_D(\omega, \omega') = 0$ si $\omega = \omega'$
  $d_D(\omega, \omega') = 1$ sinon

exemples de fonctions d'agrégation

- Σ
- *Card*
- *Max*
- *GMax*

Opérateurs basés sur une distance

Soit d une distance et f une fonction d'agrégation

Théorème 1

$\Delta_\mu^{d,f}$ satisfait les postulats (IC0), (IC1), (IC2), (IC7) et (IC8).

Théorème 2

$\Delta_\mu^{d,f}$ satisfait les postulats (IC0)-(IC8) si f satisfait :

- symétrie : pour toute permutation σ,
$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(\sigma(x_1, \cdots, x_n))$$
- composition : si $f(x_1, \cdots, x_n) \leq f(y_1, \cdots, y_n)$ alors
$$f(x_1, \cdots, x_n, z) \leq f(y_1, \cdots, y_n, z)$$
- décomposition : si $f(x_1, \cdots, x_n, z) \leq f(y_1, \cdots, y_n, z)$ alors
$$f(x_1, \cdots, x_n) \leq f(y_1, \cdots, y_n)$$

Opérateurs basés sur une distance

Soit d une distance et f une fonction d'agrégation

$\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}$

$\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}$ satisfait (IC0)-(IC8)

$\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}$

$E = \{K_1, \cdots, K_n\}$ $\qquad (d_1^{\omega}, \cdots, d_n^{\omega})$ avec $d_i^{\omega} = d(\omega, K_i)$
L_{ω}^{E} à partir de $(d_1^{\omega}, \cdots, d_n^{\omega})$ rangé en ordre décroissant

$GMax(d_1^{\omega}, \cdots, d_n^{\omega}) \leq GMax(d_1^{\omega'}, \cdots, d_n^{\omega'})$ si et seulement si

$$L_{\omega}^{E} \leq L_{\omega'}^{E}$$

$\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}$ satisfait (IC0)-(IC8)

Fusion : définition

point de vue syntaxique

K_i : base de croyances (ensemble fini de formules)

Recherche des sous-bases cohérentes de $(K_1 \cup \cdots \cup K_n) \cup \{\mu\}$ maximales selon l'inclusion ensembliste ou la cardinalité

M sous-base cohérente maximale selon l'inclusion ensembliste

- $M \subseteq K \cup \{\mu\}$,
- $\mu \in M$,
- M est cohérente,
- si $M \subset M' \subseteq K \cup \{\mu\}$, alors M' est incohérente

K, H, A et B bases de croyances

Postulats pour la fusion syntaxique

Inclusion	$K \triangle A \subseteq K \cup A$.
Symétrie	$K \triangle A = A \triangle K$.
Forte Cohérence	$K \triangle A$ est cohérent.
Congruence	si $K \cup A = H \cup B$ alors $K \triangle A = H \triangle B$.
Vacuité	si $K \cup A$ est cohérent alors $K \triangle A = K \cup A$.
"Reversion"	si $K \cup A$ et $H \cup B$ ont les mêmes minimaux sous-ensembles incohérents alors $(K \cup A) \backslash (K \triangle A) = (H \cup B) \backslash (H \triangle B)$.
"Global Relevance"	si $\alpha \in (K \cup A) \backslash (K \triangle A)$ alors il existe C t.q. $K \triangle A \subseteq C \subseteq (K \cup A)$, C est cohérent mais $C \cup \{\alpha\}$ est incohérent.
"Global Core-retainment"	si $\alpha \in (K \cup A) \backslash (K \triangle A)$ alors il existe C t.q. $C \subseteq (K \cup A)$, C est cohérent mais $C \cup \{\alpha\}$ est incohérent.

Fusion "Partial meet"

K : base de croyances

α-reste

sous-ensemble de K maximal selon l'inclusion ensembliste qui implique α,
$K \underline{\perp} \alpha$: ensemble des α-restes
$K \underline{\perp} \perp$: ensemble des sous-ensembles maximaux cohérents

fonction de sélection générale

$$\gamma : 2^{2^{\mathcal{L}}} \rightarrow 2^{2^{\mathcal{L}}}$$

pour tout $X \subseteq \mathcal{L}$

(1) $\gamma(X \underline{\perp} \perp) \subseteq X \underline{\perp} \perp$

(2) $\gamma(X \underline{\perp} \perp) \neq \emptyset$.

Fusion “Partial meet”

fonction de sélection générale équitable

Pour tout $X,\ X' \subseteq \mathcal{L}$,
$X \perp\!\!\!\perp \perp = X' \perp\!\!\!\perp \perp$ implique $X \setminus \bigcap_{\gamma}(\gamma(X \underline{\perp} \perp)) = X' \setminus \bigcap_{\gamma}(\gamma(X' \underline{\perp} \perp))$.

Opérateur de fusion “Partial meet”

γ : fonction de sélection générale équitable
K et A : bases de croyances

$$\triangle_{\gamma} : 2^{\mathcal{L}} \times 2^{\mathcal{L}} \rightarrow 2^{\mathcal{L}}$$

$$K \triangle_{\gamma} A = \bigcap \gamma((K \cup A) \underline{\perp} \perp).$$

$\triangle_{\gamma}$ satisfait les postulats *Inclusion*, *Forte cohérence*, *Congruence*, *“Global relevance”*

Fusion par "kernel"

K et A : bases de croyances

$\alpha -$ *kernel*

$\alpha -$ *kernel* de K : sous-ensemble minimal de K impliquant α
$\perp$-kernel de $K \cup A$: sous-ensemble minimaux incohérents de $K \cup A$.

$(K \cup A) \perp\!\!\!\perp \perp$: ensemble des sous-ensemble minimaux incohérents de $K \cup A$.

sous-ensemble minimal incohérent

$X' \in (K \cup A) \perp\!\!\!\perp \perp$ si et seulement si

- $X' \subseteq K \cup A$, X' est incohérent
- $X'' \subset X'$ alors X'' est cohérent

Fusion par “kernel”

K et A : bases de croyances

fonction d’incision générale

$$\sigma : 2^{2^{\mathcal{L}}} \rightarrow 2^{\mathcal{L}}$$

(1) $\sigma((K \cup A)\perp\!\!\!\perp\perp) \subset \bigcup((K \cup A)\perp\!\!\!\perp\perp)$
(2) si $X \in (K \cup A)\perp\!\!\!\perp\perp$ and $X \neq \emptyset$ alors $X \cap \sigma((K \cup A)\perp\!\!\!\perp\perp) \neq \emptyset$.

opérateur de fusion par “kernel”

$$\triangle_\sigma : 2^{\mathcal{L}} \times 2^{\mathcal{L}} \rightarrow 2^{\mathcal{L}}$$

$$K \triangle_\sigma A = (K \cup A) \backslash \sigma((K \cup A)\perp\!\!\!\perp\perp)$$

$\triangle_\sigma$ satisfait les postulats *Inclusion*, *Symètrie*, *Forte cohérence*, *Congruence*, *Vacuité*, *“Global relevance”*.

Fusion par r-ensembles

$E = \{K_1 \ldots K_n\}$. Tous les K_i sont cohérents.
$\bigcup E = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ IC : contraintes d'intégrité

R-ensembles potentiel

X est un R-ensemble potentiel ssi X est un ensemble de formules t.q. $((\bigcup E) \backslash X) \cup IC$ est cohérent.

$\mathcal{PR}_{IC}(E)$: ensemble des R-ensembles potentiels

Minimalité $\longrightarrow$ Stratégie P $\longrightarrow$ Pré-ordre $\leq_P$ sur les R-ensembles Potentiels

Stratégies : Σ, $Card$, Max, $GMax$

Fusion par r-ensembles

R-ensembles

$E = \{K_1 \dots K_n\}$

$X \subset K_1 \cup \dots \cup K_n$ est un R-ensemble de E selon P ssi

(i) $X \in \mathcal{PR}_{IC}(E)$;

(ii) $\forall X' \subseteq \bigcup E$ si $X' \subseteq X$ alors $(\bigcup E \backslash X') \cup IC$ est incohérent.

(iii) $\nexists X' \subseteq \bigcup E$ t. q. $X' <_P X$.

$\mathcal{R}_{P,IC}(E)$: ensemble des R-ensembles

f : fonction de selection

Opérateur de fusion par R-ensembles

$$\Delta^{RSF}_{P,IC} : 2^{\mathcal{L}} \times \dots \times 2^{\mathcal{L}} \rightarrow 2^{\mathcal{L}}$$

$$\Delta^{RSF}_{P,IC}(E) = ((\bigcup E) \backslash f(\mathcal{R}_{P,IC}(E)) \cup IC$$

.

Fusion par r-ensembles

Propriétés logiques

- Pour toute strategie P,
  $\Delta^{RSF}_{P,IC}$ satisfait les postulats *Symètrie*, *Forte cohérence*, *Vacuité*, *"Global core-retainment"*.

- De plus pour les stratégies Σ et *Card*,
  $\Delta^{RSF}_{P,IC}$ satisfait également les postulats *Congruence* et *Reversion*.