Annexe

Odile Papini

August 3, 2004

l'objet de cette annexe est un rappel rapide du calcul propositionnel et du calcul des prédicats, pour plus de détails le lecteur pourra consulter les ouvrages suivants [2], [1], [4], [3].

Annexe 1, le calcul propositionnel

Dans la logique contemporaine on observe deux courants. L'un qui voit la logique comme un langage interprété, une théorie qui traite des aspects les plus abstraits de la réalité, comme par exemple, dans les travaux de Frege, de Russell, de Quine. L'autre voit la logique comme un calcul, comme par exemple dans les travaux de Boole, de Skolem, de Hintikka, cette conception permet de traiter les systèmes axiomatiques formalisés, non pas comme des formules vraies absolument, mais comme des collections de formules vraies relativement à un modèle, c'est à dire relativement à un choix de domaine pour les variables et d'interprétation pour les constantes.

La dissociation entre la notion de vérité mathématique "logique" et de théorème "logique" se fait par la distinction entre le langage objet et le métalangage, c'est à dire le langage d'observation. Le métalangage syntaxique traite des popriétés et des relations des expressions et formules en faisant abstraction de leur signification. Le métalangage sémantique traite des popriétés et des relations des expressions qui reposent sur des rapports entre signifiant et signifié.

Le langage du calcul propositionnel Le langage propositionnel $\mathcal{L}$ est construit à partir d'un ensemble dénombrable de de variables propositionnelles $\mathcal{P}$ (des lettres éventuellement indicées), des constantes 0 (Faux) et 1 (Vrai) et des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ et de parenthèses.

Définition 1 *L'ensemble des formules bien formées de $\mathcal{L}$ est le plus petit ensemble tel que :*

- 0 *et* 1 *sont des formules;*
- *une variable propositionnelle (ou proposition) est une formule;*
- *si P et Q sont des formules alors $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$ sont des formules.*

Aspect syntaxique du calcul propositionnel L'aspect syntaxique du calcul propositionnel revient à définir un système formel dans lequel les déductions que l'on peut faire conduisent à des théorèmes.

Pour distinguer les théorèmes des formules bien formées on utilise le symbole d'assertion logique noté $\vdash$ qui n'est pas un nouvel opérateur mais un signe métalogique (du métalangage).

Afin de pouvoir effectuer des déductions des règles sont définies. La règle de substitution permet de remplacer dans un théorème une variable propositionnelle, partout où elle figure, par une autre variable propositionnelle ou par une formule bien formée. La règle de conclusion, notée Cons, souvent appelée règle de dérivation ou de modus ponens, spécifie que si P et $P \to Q$ sont des théorèmes alors Q est un théorème, cela se note :

$$\frac{\vdash P, \vdash P \to Q}{\vdash Q}$$

Les définitions sont des équivalences qui permettent de simplifier l'écriture des formules en n'utilisant que certains connecteurs, par exemple, dans les définitions ci-dessous, seuls les connecteurs $\neg$ et $\vee$ sont utilisés :

D_1 $P \to Q =_{def} \neg P \vee Q$;

D_2 $P \wedge Q =_{def} \neg(\neg P \vee \neg Q)$;

D_3 $P \leftrightarrow Q =_{def} (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$.

La définition d'un système formel, nécessite le recours à des axiomes, c'est à dire des propositions évidentes par elles-mêmes qui ne nécessitent aucune démonstration. Plusieurs choix d'ensembles d'axiomes sont possibles, parmi les plus célèbres, Whitehead et Russell ont proposé un système de 5 axiomes, Hilbert et Ackermann un système de 4 axiomes, Kleene et Gentsen un système de 13 axiomes. Pour des raisons de simplicité nous rappellerons le système de Lukasiewicz, datant des années 1930, n'utilisant que les connecteurs $\neg$ et $\to$ et basé sur les 3 axiomes suivants :

A_1 $\vdash P \to (Q \to P)$;

A_2 $\vdash (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$;

A_3 $\vdash (\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$.

Dans le système formel de Lukasiewicz, la seule règle d'inférence est le modus ponens et on a les propriétés suivantes :

Proposition 1 $\forall P \in \mathcal{L}, \vdash (P \to P)$.

Proposition 2 $\forall P_1, \ldots, P_{n-1}, Q \in \mathcal{L} \times \ldots \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$, *si* $P_1, \ldots, P_{n-1} \vdash (P_n \to Q)$ *alors* $P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Q$.

L'utilisation du théorème de déduction, ci-après, évite l'écriture d'une déduction complète de la formule considérée, ce qui serait beaucoup plus long.

Théorème 1 *(de déduction.)* $\forall P_1, \ldots, P_{n-1}, Q \in \mathcal{L} \times \ldots \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$, *Si* $P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Q$ *alors* $P_1, \ldots, P_{n-1} \vdash (P_n \to Q)$.

De plus, on dispose des quelques théorèmes suivants qui s'avèrent utiles :

Proposition 3 $\forall P, Q, R \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$, *toutes les formules suivantes sont des théorèmes :*

- $\vdash ((P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R)))$;

- $\vdash (P \to ((P \to Q) \to Q))$;
- $\vdash (\neg P \to (P \to Q))$;
- $\vdash (\neg\neg P \to P)$;
- $\vdash (P \to \neg\neg P)$;
- $\vdash ((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P))$;
- $\vdash (P \to (\neg Q \to \neg(P \to Q)))$;
- $\vdash ((Q \to P) \to ((\neg Q \to P) \to P))$.

Aspect sémantique du calcul propositionnel L'aspect sémantique du calcul propositionnel est l'interprétation des formules de $\mathcal{L}$ et consiste en l'analyse des formules toujours vraies, appelées tautologies.

Définition 2 *On appelle interprétation, toute application σ de $\mathcal{P}$ dans $\{0,1\}$ telle que $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(1) = 1$. L'application σ est étendue aux formules de la façon suivante : $\forall P, Q \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$,*

- $\sigma(\neg P) = 1 - \sigma(P)$;
- $\sigma(P \vee Q) = max(\sigma(P), \sigma(Q))$;
- $\sigma(P \wedge Q) = min(\sigma(P), \sigma(Q))$;
- $\sigma(P \to Q) = max((1 - \sigma(P)), \sigma(Q))$;
- $\sigma(P \leftrightarrow Q) = min(max((1 - \sigma(P)), \sigma(Q)), max(\sigma(P), (1 - \sigma(Q))))$.

Cela se représente souvent sous la forme d'une table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

On dispose des définitions suivantes :
$\forall P, Q \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ un ensemble de formules de $\mathcal{L}$, et σ une interprétation,

- On appelle tautologie (ou formule valide) toute formule P, telle que pour toute interprétation σ, $\sigma(P) = 1$, on la note $\models P$.
- La formule Q est une conséquence de la formule P si $\sigma(P) = 1$ alors $\sigma(Q) = 1$, on écrit alors $P \models Q$.
- La formule Q est une conséquence de l'ensemble de formules $\mathcal{A}$, si $\forall P \in \mathcal{A}$, $\sigma(P) = 1$ alors $\sigma(Q) = 1$, on écrit $\mathcal{A} \models Q$.

- Les formules P et Q sont équivalentes si $P \models Q$ et $Q \models P$, on écrit alors $P \equiv Q$.
- Une formule P est satisfaisable ou cohérente si il existe une interprétation σ telle que, $\sigma(P) = 1$.
- Un ensemble de formules $\mathcal{A}$ est satisfaisable ou cohérent si il existe une interprétation σ telle que $\forall P \in \mathcal{A}$, $\sigma(P) = 1$. On appelle alors σ un modèle de $\mathcal{A}$.
- On dit que deux ensembles de formules sont équivalents, s'ils ont exactement les mêmes modèles.
- Une formule P est insatisfaisable ou incohérente si pour toute interprétation σ, $\sigma(P) = 0$. On montre facilement que P est insatisfaisable si $\neg P$ est une tautologie.
- Un ensemble de formules $\mathcal{A}$ est insatisfaisable ou incohérent si pour toute interprétation σ, $\exists P \in \mathcal{A}$ tel que $\sigma(P) = 0$. Autrement dit, il n'existe aucun modèle de $\mathcal{A}$.

De plus on dispose des résultats suivants :

Proposition 4 $\forall P, Q \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$,

- $\models (P \to Q)$ *ssi* $P \models Q$;
- $\models (P \leftrightarrow Q)$ *ssi* $P \equiv Q$;
- *si* $\models P$ *et* $\models (P \to Q)$ *alors* $\models Q$;
- $\models (P \wedge Q)$ *ssi* $\models P$ *et* $\models Q$;
- *si* $\models P$ *ou* $\models Q$ *alors* $\models (P \vee Q)$.

Proposition 5 $\forall P \in \mathcal{L}$, *si* $\vdash P$ *alors* $\models P$.

Théorème 2 *(d'adéquation.)* $\forall P \in \mathcal{L}$, *si* $\models P$ *alors* $\vdash P$. *Autrement dit, toutes les tautologies sont des théorèmes.*

Théorème 3 *(de complétude.) Soit* $\mathcal{A}$ *un ensemble de formules de* $\mathcal{L}$, *soit* P *une formule de* $\mathcal{L}$, $\mathcal{A} \models P$ *ssi* $\mathcal{A} \vdash P$.

Théorème 4 *(de compacité.) Soit* $\mathcal{A}$ *un ensemble de formules de* $\mathcal{L}$, *si pour toute famille finie* $\mathcal{A}\prime$, $\mathcal{A}\prime \subset \mathcal{A}$, *il existe une interprétation* σ *telle que* $\forall P \in \mathcal{A}\prime$, $\sigma(P) = 1$ *alors il existe une interprétation* σ *telle que* $\forall P \in \mathcal{A}$, $\sigma(P) = 1$.

Théorème 5 *(de finitude.) Soit* $\mathcal{A}$ *un ensemble de formules de* $\mathcal{L}$, *si* $\mathcal{A} \models P$ *alors il existe* $\mathcal{A}\prime$ *fini,* $\mathcal{A}\prime \subset \mathcal{A}$ *tel que* $\mathcal{A}\prime \models P$.

Théorème 6 *(de décidabilité.)* $\forall P \in \mathcal{L}$, *il existe un programme qui pour toute formule* P, *indique en un temps fini si oui ou non* $\vdash P$.

Il est souvent utile, d'un point de vue algorithmique, de transformer les formules propositionnelles en formules équivalentes ayant un caractère "canonique".

Définition 3 *On appelle* **littéral** *une proposition ou la négation d'une proposition.*

Définition 4 *On appelle* **clause** *une disjonction de littéraux.*

Définition 5 *On appelle* **cube** *une conjonction de littéraux.*

Une forme **conjonctive normale** est une conjonction de clauses et une forme **disjonctive normale** est disjonction de cubes et on a le résultat suivant :

Théorème 7 *(de normalisation.)*

- *Toute formule propositionnelle admet une forme conjonctive normale qui lui est équivalente.*
- *Toute formule propositionnelle admet une forme disjonctive normale qui lui est équivalente.*

Annexe 2, le calcul des prédicats

Le calcul propositionnel est un formalisme logique intéressant, en particulier, du point de vue des applications informatiques, parce qu'il est décidable, cependant sa puissance d'expression est limitée. Le calcul des prédicats ou logique du premier ordre est un formalisme logique mieux adapté à la représentation des connaissances. Tout comme dans le cas du calcul des prédicats nous allons présenter brièvement, le langage, l'aspect syntaxique puis l'aspect sémantique du calcul des prédicats.

Le langage du calcul des prédicats : $\mathcal{L}_{Pr}$ Le Le langage du calcul des prédicats $\mathcal{L}_{Pr}$ (ou vocabulaire) est construit à partir d'un ensemble infini dénombrable de symboles de prédicats ou **prédicats**, d'un ensemble infini dénombrable de symboles **fonctionnels** [1], d'un ensemble infini dénombrables de **variables**, des connecteurs : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ et des **quantificateurs** universel $\forall$, et existentiel $\exists$.

Définition 6 terme

- *x une variable est un terme;*
- *f un symbole fonctionnel est un terme;*

[1] les symboles constants sont des symboles fonctionnels d'arité 0.

- *si* $t_1, \cdots, t_n$ *sont des termes alors* $f(t_1, \cdots, t_n)$ *est un terme.*

Définition 7 atome

- *Si* $t_1, \cdots, t_n$ *sont des termes et* P *est un prédicat alors* $P(t_1, \cdots, t_n)$ *est un atome.*

Définition 8 formule

- *un atome est une formule;*
- *si* A *et* B *sont des formules alors* $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ *sont des formules;*
- *si* A *est une formule et* x *une variable alors* $\forall x A$, $\exists x A$ *sont des formules.*

La présence de quantificateurs dans le langage du calcul des prédicats entraîne la définition de variables *liées* ou *libres* définies comme suit :

Définition 9 *Si l'occurrence d'une variable est placée sous la portée d'un quantificateur, cette occurrence est dite* liée, *sinon elle dite* libre.

L'ensemble des variables liées est défini par :

Définition 10 *si* A *est une formule, l'ensemble* **Varlie**(A) *des variables liées de* A *est défini par :*

- *si* A *est un atome alors* **Varlie**(A) $= \emptyset$*;*
- *si* A *est de la forme* $B \wedge C$ *ou* $B \vee C$ *ou* $B \rightarrow C$ *ou* $B \leftrightarrow C$ *alors* **Varlie**(A) $=$ **Varlie**(B) $\cup$ **Varlie**(C)*;*
- *si* A *est de la forme* $\neg B$ *alors* **Varlie**(A) $=$ **Varlie**(B)*;*
- *si* A *est de la forme* $\forall x\, B$ *ou* $\exists x\, B$ *alors* **Varlie**(A) $=$ **Varlie**(B) $\cup \{x\}$.

L'ensemble des variables libres est défini par :

Définition 11 *si* A *est une formule,* **Var**(A) *est l'ensemble des variables de* A*, l'ensemble* **Varlib**(A) *des variables libres de* A *est défini par :*

- *si* A *est un atome alors* **Varlib**(A) $=$ **Var**(A)*;*
- *si* A *est de la forme* $B \wedge C$ *ou* $B \vee C$ *ou* $B \rightarrow C$ *ou* $B \leftrightarrow C$ *alors* **Varlib**(A) $=$ **Varlib**(B) $\cup$ **Varlib**(C)*;*
- *si* A *est de la forme* $\neg B$ *alors* **Varlib**(A) $=$ **Varlib**(B) *;*
- *si* A *est de la forme* $\forall x\, B$ *ou* $\exists x\, B$ *alors* **Varlib**(A) $=$ **Varlib**(B) - $\{x\}$.

Définition 12 *Une formule* A *est dite* **close** *ou* **fermée** *si* $Varlib(A) = \emptyset$.

Aspect syntaxique du calcul des prédicats L'aspect syntaxique du calcul propositionnel revient à définir un système formel dans lequel les déductions que l'on peut faire conduisent à des théorèmes. La définition d'un système formel, nécessite le recours à des axiomes, pour des raisons de simplicité nous utiliserons l'extension au calcul des prédicats du système de Lukasiewicz, et basé sur les 5 axiomes suivants :
soit A, B, C des formules, x une variable et t un terme, D une formule n'ayant pas x pour variable libre

A1) $(A \to (B \to A))$;

A2) $((A \to (B \to C)) \to (A \to B) \to (A \to C)))$;

A3) $((\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$;

A4) $(\forall x\, A(x) \to A(t))$;

A5) $((D \to B) \to (D \to \forall x\, B)$;

Les règles d'inférence de ce système formel sont la règles de déduction, ou modus ponens :

$$\frac{\vdash A,\ \vdash A \to B}{\vdash B}$$

et règle de généralisation :

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x\, A.}$$

et on a les propriétés suivantes :

Proposition 6 $\forall A \in \mathcal{L}_{Pr} \quad \vdash (A \to A)$

Proposition 7 $\forall A_1, \cdots, A_{n-1} \in \mathcal{L}_{Pr} \times \cdots \times \mathcal{L}_{Pr}$
si $\quad A_1, \cdots, A_{n-1} \vdash (A_n \to B) \quad$ *alors* $\quad A_1, \cdots, A_n \vdash B$

Théorème 8 *(de déduction). Soient $A_1, \cdots, A_n$ des formules closes de $\mathcal{L}_{Pr}$,*
si $\quad A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n \vdash B \quad$ *alors* $\quad A_1, \cdots, A_{n-1} \vdash (A_n \to B)$

Aspect sémantique du calcul des prédicats L'aspect sémantique du calcul des prédicats est l'interprétation des formules de $\mathcal{L}_{Pr}$.

Définition 13 *On appelle* **interprétation** *le triplet $I = (D, I_c, I_v)$ où D est un ensemble non vide, appelé domaine d'interprétation, I_c est la fonction associe à tout symbole fonctionnel une valeur du domaine D et à tout prédicat un valeur dans $\{0,1\}$, et I_v est la fonction qui associe à toute variable une valeur de D.*

Définition 14 *L'interprétation d'une formule du calcul des prédicats A associe une valeur de vérité $I(A)$ à A comme suit :*

- *si x est une variable libre alors $I(x) = I_v(x)$;*

- *$I(f(t_1, \cdots, t_n)) = (I_c(f))(I(t_1), \cdots, I(t_n))$;*
- *$I(P(t_1, \cdots, t_m)) = (I_c(P))(I(t_1), \cdots, I(t_m))$;*
- *si A et B sont des formules alors $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ s'interprètent comme dans le calcul propositionnel;*
- *si A est une formule et x une variable alors $I(\forall x\ A) = 1$ si $I_{x/d}(A) = 1$ pour tout élément $d \in D$;*
- *si A est une formule et x une variable alors $I(\exists x\ A) = 1$ si $I_{x/d}(A) = 1$ pour au moins un élément $d \in D$.*

On dispose des définitions suivantes :

Soient $A \in \mathcal{L}_{Pr}$, $B \in \mathcal{L}_{Pr}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$.

- A est une **tautologie** (ou une formule valide), $\models A$, si pour toute interprétation I, $I(A) = 1$;
- B est une **conséquence** de A si pour toute interprétation I, $I(A) = 1$ alors $I(B) = 1$, on écrit $A \models B$;
- B est une **conséquence** de $\mathcal{F}$ si pour toute interprétation I, tq $\forall A \in \mathcal{F}$, $I(A) = 1$ alors $I(B) = 1$, on écrit $\mathcal{F} \models B$;
- A est **satisfaisable** s'il existe une interprétation I tq $I(A) = 1$;
- $\mathcal{F}$ est **satisfaisable** s'il existe une interprétation I tq $\forall A \in \mathcal{F}$, $I(A) = 1$
- A est **insatisfaisable** ou **incohérente** si pour toute interprétation I, $I(A) = 0$;
- $\mathcal{F}$ est **insatisfaisable** si pour toute interprétation I, $\exists A \in \mathcal{F}$ tq $I(A) = 0$;

Proposition 8 *$\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$ ensemble de formules closes, B formule close $\mathcal{F} \models B$ ssi $\mathcal{F} \cup \{\neg B\}$ est insatisfaisable*

Voici quelques propriétés :

$$
\begin{array}{lcllcl}
(\forall x\ A \wedge \forall x\ B) & \equiv & \forall x\ (A \wedge B) & \exists x\ (A \vee B) & \equiv & (\exists x\ A \vee \exists x\ B) \\
(\forall x\ A \vee \forall x\ B) & \to & \forall x\ (A \vee B) & \exists x\ (A \wedge B) & \to & (\exists x\ A \wedge \exists x\ B) \\
\forall x\ (A \to B) & \to & (\forall x\ A \to \forall x\ B) & \exists x\ (A \to B) & \equiv & (\forall x\ A \to \exists x\ B) \\
\forall x\ (A \equiv B) & \to & (\forall x\ A \equiv \forall x\ B) & \forall x\ \neg A & \equiv & \neg \exists x\ A
\end{array}
$$

$$\forall x \, \forall y \, A \quad \equiv \quad \forall y \, \forall x \, A$$

$$\exists x \, \exists y \, A \quad \equiv \quad \exists y \, \exists x \, A$$

$$\exists x \, \forall y \, A \quad \rightarrow \quad \forall y \, \exists x \, A$$

de plus, on dispose des résultats suivants :

Proposition 9 $\forall A \in \mathcal{L}_{Pr}$ *si* $\vdash A$ *alors* $\models A$ *(les formules qui sont des théorèmes sont des tautologies)*

Théorème 9 *(d'adéquation).* $\forall A \in \mathcal{L}_{Pr}$ *si* $\models A$ *alors* $\vdash A$

Théorème 10 *(de complétude). Soit* $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$ *et* $B \in \mathcal{L}_{Pr}$, $\mathcal{F} \models B$ *ssi* $F \vdash B$

Théorème 11 *(de compacité). Soit* $\mathcal{F}$ *un ensemble de formules de* $\mathcal{L}_{Pr}$*.*
Si toute famille finie $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ *est satisfaisable alors* $\mathcal{F}$ *est aussi satisfaisable.*

Théorème 12 *(de finitude). Soit* $\mathcal{F}$ *un ensemble de formules de* $\mathcal{L}_{Pr}$*. Soit* $B \in \mathcal{L}_{Pr}$ *si* $\mathcal{F} \models B$ *alors* $\exists \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ *fini tq* $\mathcal{F}' \models B$

Proposition 10 *Soit* $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$ *et* B *une tautologie,* $\mathcal{F} \vdash \neg B$ *si* $\mathcal{F}$ *n'a pas de modèle.*

Théorème 13 *Le calcul des prédicats est indécidable, c'est à dire qu'il n'existe aucun programme qui pour une formule* $A \in \mathcal{L}_{Pr}$ *indique en un temps fini si* A *est satisfaisable.*

Plus précisemment le calcul des prédicats est semi-décidable, c'est à dire qu'il n'est pas possible d'assurer la terminaison d'un programme qui teste la satisfaisabilité d'une formule dans le cas où celle-ci est insatisfaisable.
D'un point de vue algorithmque, les problèmes liés à la quantification peuvent parfois s'avérer gênants, aussi il est possible de se débarasser des quantificateurs comme suit :

Définition 15 *Soit une formule* $A \in \mathcal{L}_{Pr}$*,* A *est sous* **forme prénexe** *si* $A = Q_1 \, x_1 \, \cdots \, Q_n \, x_n \, M$*, où* $Q_1, \cdots, Q_n$ *est soit* $\forall$*, soit* $\exists$ *et* M *ne contient aucun quantificateur.*

Proposition 11 *pour toute formule* $A \in \mathcal{L}_{Pr}$ *il existe une forme prénexe équivalente à* A*.*

Les notions de littéraux, clauses et cubes sont étendus au calcul des prédicats comme suit. On appelle **littéral** une atome ou la négation d'un atome, une **clause** est une disjonction de littéraux et un **cube** est conjonction de littéraux. Une forme **conjonctive normale** est une forme prénexe dont la matrice M est une conjonction de clauses. Une forme **disjonctive normale** est une forme prénexe dont la matrice M est une disjonction de cubes.

La mise sous **forme de Skolem** permet de supprimer les quantificateurs dans une formule du calcul des prédicats.

Soit une formule $A \in \mathcal{L}_{Pr}$, la mise sous forme de Skolem de A, notée S_A, selon l'algorithme suivant :

<u>`début`</u>

- `transformation de` A `en forme prénexe :` $Q_1\, x_1\, \cdots\, Q_n\, x_n\, M$;
- `transformation de` M `en forme conjonctive normale` M';
- `skolémisation :`

  1) `associer à toute variable quantifiée existentiellement le terme constitué par un symbole fonctionnel ayant pour arguments la liste des variables quantifiées universellement qui pr´ecèdent la variable;`
  2) `remplacer chaque occurence de variable quantifiée existentiellement par le terme défini en 1);`
  3) `supprimer les quantificateurs existentiels.`

<u>`fin`</u>

et on a le résultat suivant :

Proposition 12 *Soit S_A forme de skolem de A, A est satisfaisable ssi S_A est satisfaisable.*

Le théorème de Herbrand permet de ramener le problème de la satisfaisabilité d'une formule du calcul des prédicats au problème de la satisfaisabilité d'un ensemble de clauses du calcul propositionnel. Pour cela, on associe à la forme conjonctive normale d'une formule $A \in \mathcal{L}_{Pr}$, l'ensemble C des clauses correspondantes et on construit l'**univers de Herbrand** associé à cet ensemble de clauses C, c'est à dire l'ensemble de tous les termes sans variable construit à partir du vocabulaire de C.

On appelle **système de Herbrand** SH_C associé à C, l'ensemble des clauses obtenues à partir de C en remplaçant les variables par des éléments de l'univers de Herbrand.
et on a le résultat suivant :

Proposition 13 théorème de Herbrand *Soit C un ensemble fini de clauses, et C et SH_C le système de Herbrand associé à C, C est satisfaisable ssi SH_C est satisfaisable.*

Bibliography

[1] J. P. Delahaye. *Outils logiques pour l'intelligence artificielle.* Eyrolles, Paris, 1986.

[2] A. Thayse et co auteurs. *Approche logique de l'intelligence artificielle, Tome 1.* Informatique. DUNOD, Paris, 1990.

[3] Paul Gochet et Pascal Gribomont. *Logique : méthodes pour l'informatique fondamentale.* Langue, Raisonnement, Calcul. Hermes, Paris, 1990.

[4] S. C. Kleene. *Logique mathématique.* Epistémologie. Jacques Gabay, Paris, 1987.