

Ingénierie du WEB Sémantique

Cours 3 : Reasonner avec une ontologie : raisonner en logique de description

Odile PAPINI

POLYTECH

Université d'Aix-Marseille

odile.papini@univ-amu.fr

<http://odile.papini.perso.luminy.univ-amu.fr/sources/WEBSEM.html>

Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Raisonnement sur les TBox
- 3 Raisonnement sur les ABox
- 4 Méthode des tableaux en logique de description
- 5 Complexité du raisonnement

Bibliographie I



Supports de cours :

F. Baader, F. Calvanese & al

The Description Logic Handbook : Theory, Implementation and Applications. Cambridge university press. 2002



Amedeo Napoli INRIA Nancy

Une introduction aux logiques de description Rapport INRIA 3314. 1997

<http://hal.inria.fr/inria-00073375/en/>



Michel Gagnon

Logiques descriptives et OWL

http://www.cours.polymtl.ca/inf6410/Documents/logique_descriptive.pdf



Tutoriaux

<http://dl.kr.org/courses.html>

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox

- satisfaisabilité
- subsomption
- équivalence
- exclusion mutuelle

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : satisfaisabilité

- Un concept est **satisfaisable** par rapport à \mathcal{T} ssi il existe \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$
- si il existe \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ alors \mathcal{I} est un modèle de C
- Un concept est **insatisfaisable** par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} = \emptyset$

exemples

- satisfaisabilité : *Homme* \sqcap \neg *Homme*?
- modèle de \mathcal{T} : $\Delta\{a, b, c\}$, $\text{Homme}^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$,
 $a\text{Enfant}^{\mathcal{I}} = \{(a, b), (a, c)\}$
 satisfaisabilité : *Homme*?, *Femme*?, *aEnfant*?

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : satisfaisabilité

- Un concept est **satisfaisable** par rapport à \mathcal{T} ssi il existe \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$
- si il existe \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ alors \mathcal{I} est un modèle de C
- Un concept est **insatisfaisable** par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} = \emptyset$

exemples

- satisfaisabilité : $(\text{Homme} \sqcap \neg \text{Homme})^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- modèle de \mathcal{T} : $\Delta = \{a, b, c\}$, $\text{Homme}^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$,
 $a\text{Enfant}^{\mathcal{I}} = \{(a, b), (a, c)\}$
 satisfaisabilité : $\text{Homme}^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$, $\text{Femme}^{\mathcal{I}} = \{c\}$

Raisonnement

Exemple (cours Logiques de description)

TBox \mathcal{T} :

$Femme \equiv \neg Homme$,

$Mere \equiv Femme \sqcap \exists aEnfant.\top$

$Pere \equiv Homme \sqcap \exists aEnfant.\top$

$Celibataire \equiv \forall marieAvec.\perp$

modèle de \mathcal{T} :

$\Delta = \{a, b, c, d\}$, $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$, $Femme^{\mathcal{I}} = \{c, d\}$,

$aEnfant^{\mathcal{I}} = \{(b, a), (b, c), (d, a), (d, c)\}$

$Pere^{\mathcal{I}} = \{b\}$, $Mere^{\mathcal{I}} = \{d\}$,

$EstmarieAvec^{\mathcal{I}} = \{(b, d), (d, b)\}$, $Celibataire^{\mathcal{I}} = \{a, c\}$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : subsomption

- Un concept C est **subsumé** par D par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$

exemples

- axiome de \mathcal{T} : $Mere \equiv \exists aEnfant.T$
subsomption : $Mere \sqsubseteq Femme?$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : subsumption

- Un concept C est **subsumé** par D par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$

exemples

- axiome de \mathcal{T} : $Mere \equiv \exists aEnfant.T$
 subsumption : $Mere \sqsubseteq Femme$
 car $Mere^{\mathcal{I}} = \{d\}$ et $Femme^{\mathcal{I}} = \{c, d\}$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : équivalence

- Deux concepts C et D sont **équivalents** par rapport à T ssi pour tout \mathcal{I} modèle de T on a $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $T \models C \equiv D$

exemple

- équivalence : $Pere \equiv Homme \sqcap \exists aEnfant.T ?$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : équivalence

- Deux concepts C et D sont **équivalents** par rapport à T ssi pour tout \mathcal{I} modèle de T on a $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $T \models C \equiv D$

exemples

- équivalence : $Pere \equiv Homme \sqcap \exists aEnfant.T$
car $Pere^{\mathcal{I}} = \{b\}$, $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$ et $\exists aEnfant.T^{\mathcal{I}} = \{b, d\}$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : exclusion mutuelle

- Deux concepts C et D sont **disjoints** par rapport à T ssi pour tout \mathcal{I} modèle de T on a $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqcap D \sqsubseteq \perp$

exemples

- disjoints : *Pere* et *Mere* ?
- disjoints : *Celibataire* et *Pere* ?

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : exclusion mutuelle

- Deux concepts C et D sont **disjoints** par rapport à \mathcal{T} ssi pour tout \mathcal{I} modèle de \mathcal{T} on a $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqcap D \sqsubseteq \perp$

exemples

- disjoints : *Pere et Mere* car $Pere^{\mathcal{I}} = \{b\}$ et $Mere^{\mathcal{I}} = \{d\}$
- disjoints : *Celibataire et Pere* car $Celibataire^{\mathcal{I}} = \{a, c\}$ et $Pere^{\mathcal{I}} = \{b\}$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : réduction à l'insatisfaisabilité

- Le concept C est **subsumé** par le concept D par rapport à \mathcal{T} ssi $C \sqcap \neg D$ est insatisfaisable
- Deux concepts C et D sont **équivalents** par rapport à \mathcal{T} ssi $C \sqcap \neg D$ et $\neg C \sqcap D$ sont insatisfaisables
- Deux concepts C et D sont **disjoints** par rapport à \mathcal{T} ssi $C \sqcap D$ est insatisfaisable

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : élimination de la TBox

- procédure de preuve : utilisation de formules indépendantes de toute terminologie
- remplacer tous les termes de la formule par leur définition dans la terminologie

- exemple : $TBox : \textit{Femme} \equiv \textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin}$,
 $\textit{Homme} \equiv \textit{Personne} \sqcap \neg \textit{Femme}$

- démontrer l'insatisfaisabilité de : $\textit{Femme} \sqcap \textit{Homme} ?$

1) $\textit{Femme} \sqcap \textit{Homme}$

2) $\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \textit{Personne} \sqcap \neg \textit{Femme}$

3) $\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \textit{Personne} \sqcap \neg (\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin})$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : élimination de la TBox

- exemple : $TBox : \textit{Femme} \equiv \textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin}$,
 $\textit{Homme} \equiv \textit{Personne} \sqcap \neg \textit{Femme}$
- démontrer l'insatisfaisabilité de : $\textit{Femme} \sqcap \textit{Homme}$

1) $\textit{Femme} \sqcap \textit{Homme}$

2) $\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \textit{Personne} \sqcap \neg \textit{Femme}$

3) $\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \textit{Personne} \sqcap \neg (\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin})$

4) $\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \neg (\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin})$ par idempotence

5) $\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap (\neg \textit{Personne} \sqcup \neg \textit{Feminin})$ par distributivité

6) $(\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \neg \textit{Personne}) \sqcup (\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \neg \textit{Feminin})$

Or $(\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \neg \textit{Personne})^{\mathcal{I}} = \emptyset$ et $(\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \neg \textit{Feminin})^{\mathcal{I}} = \emptyset$

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox

- cohérence (consistency)
- validation d'instances (instance checking)

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox : cohérence

- \mathcal{A} une ABox est **cohérente** par rapport à \mathcal{T} ssi il existe \mathcal{I} un modèle de \mathcal{T} qui satisfait \mathcal{A}

exemple

- TBox : $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$,
 $Homme \equiv Personne \sqcap \neg Femme$
- ABox : $\mathcal{A} = \{Homme(anne), Femme(anne)\}$
- cohérence de \mathcal{A} ?

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox : cohérence

exemple

- $TBox$: $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$,
 $Homme \equiv Personne \sqcap \neg Femme$
- $ABox$: $\mathcal{A} = \{Homme(anne), Femme(anne)\}$
- cohérence de \mathcal{A} ?

modèle de \mathcal{T} :

$\Delta = \{paul, jean, anne, marie\}$,

$Personne^{\mathcal{I}} = \{paul, jean, anne, marie\}$, $Feminin^{\mathcal{I}} = \{anne, marie\}$,

$Femme^{\mathcal{I}} = \{anne, marie\}$, $Homme^{\mathcal{I}} = \{paul, jean\}$,

incohérence de \mathcal{A} car $anne \notin Homme^{\mathcal{I}}$

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox : validation d'instances

- $\mathcal{A} \models C(a)$ ssi toute interprétation \mathcal{I} qui satisfait \mathcal{A} satisfait aussi $C(a)$
- $\mathcal{A} \models C(a)$ ssi $\mathcal{A} \cup \neg C(a)$ est incohérent

exemple

- TBox : $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$
- ABox : $\mathcal{A} = \{Femme(anne)\}$
- $\mathcal{A} \models Feminin(anne)$?
- $\mathcal{A} \cup \neg Feminin(anne)$ incohérent ?

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox : validation d'instances

exemple

- $TBox$: $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$
- $ABox$: $\mathcal{A} = \{Femme(anne)\}$
- $\mathcal{A} \models Feminin(anne)$?
- $\mathcal{A} \cup \neg Feminin(anne)$ incohérent ?

modèle de \mathcal{T} :

$\Delta = \{paul, jean, anne, marie\}$,

$Personne^{\mathcal{I}} = \{paul, jean, anne, marie\}$, $Feminin^{\mathcal{I}} = \{anne, marie\}$,

$Femme^{\mathcal{I}} = \{anne, marie\}$, $(\neg Feminin)^{\mathcal{I}} = \{paul, jean\}$,

$\mathcal{A} \cup \neg Feminin(anne)$ incohérent car $anne \in Femme^{\mathcal{I}}$ et

$anne \notin (\neg Feminin)^{\mathcal{I}}$

Raisonnement : Monde fermé, Monde ouvert

hypothèse du monde fermé (clos)

- limitation à ce qui est énoncé
- exemple : $ABox$: $aEnfant(anne, paul)$
- $anne$ a un seul enfant c'est $paul$

Logiques de Description : hypothèse du monde ouvert

- monde ouvert : pas de limitation à ce qui est énoncé
- exemple : $ABox$: $aEnfant(anne, paul)$
- rien n'exclut que $anne$ ait d'autres enfants que $paul$
- spécifier que $anne$ a un seul enfant : $(\leq 1aEnfant)(anne)$

Raisonnement

Inférence par méthode des tableaux

- prouver $C \sqsubseteq D$
- $C \sqsubseteq D$ ssi $C \sqcap \neg D$ est insatisfaisable

un exemple introductif

- prouver :
 $\exists \textit{possede} . (\textit{Livre} \sqcap \textit{Antiquite}) \sqsubseteq (\exists \textit{possede} . \textit{Livre} \sqcap \exists \textit{possede} . \textit{Antiquite})$
- démontrer l'insatisfaisabilité de :
 $\exists \textit{possede} . (\textit{Livre} \sqcap \textit{Antiquite}) \sqcap \neg (\exists \textit{possede} . \textit{Livre} \sqcap \exists \textit{possede} . \textit{Antiquite})$

Raisonnement : exemple introductif

démontrer l'insatisfaisabilité de :

$\exists \textit{possede} . (\textit{Livre} \sqcap \textit{Antiquite}) \sqcap \neg (\exists \textit{possede} . \textit{Livre} \sqcap \exists \textit{possede} . \textit{Antiquite})$ ssi

$\exists \textit{possede} . (\textit{Livre} \sqcap \textit{Antiquite}) \sqcap (\forall \textit{possede} . \neg \textit{Livre} \sqcup \forall \textit{possede} . \neg \textit{Antiquite})$

On suppose q'un individu *a* est membre ce concept

1) $\exists \textit{possede} . (\textit{Livre} \sqcap \textit{Antiquite}) \sqcap (\forall \textit{possede} . \neg \textit{Livre} \sqcup \forall \textit{possede} . \neg \textit{Antiquite})(a)$

On a

2) $\exists \textit{possede} . (\textit{Livre} \sqcap \textit{Antiquite})(a)$

3) $\forall \textit{possede} . \neg \textit{Livre} \sqcup \forall \textit{possede} . \neg \textit{Antiquite}(a)$

Il existe un objet *b*

4) $\textit{possede}(a, b)$

5) $\textit{Livre} \sqcap \textit{Antiquite}(b)$

donc

6) $\textit{Livre}(b)$

7) $\textit{Antiquite}(b)$

Raisonnement

démontrer l'insatisfaisabilité de :

$$1) \exists \textit{possede} . (\textit{Livre} \sqcap \textit{Antiquite}) \sqcap (\forall \textit{possede} . \neg \textit{Livre} \sqcup \forall \textit{possede} . \neg \textit{Antiquite})(a)$$

On a

$$2) \exists \textit{possede} . (\textit{Livre} \sqcap \textit{Antiquite})(a)$$

$$3) \forall \textit{possede} . \neg \textit{Livre} \sqcup \forall \textit{possede} . \neg \textit{Antiquite}(a)$$

donc

$$8) \forall \textit{possede} . \neg \textit{Livre}(a)$$

$$9) \forall \textit{possede} . \neg \textit{Antiquite}(a)$$

Par 4) a possède un objet b

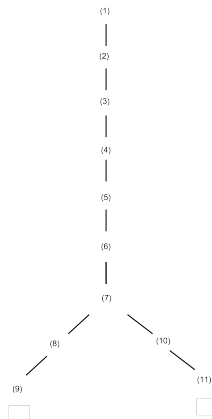
$$10) \neg \textit{Livre}(b) \text{ contradiction avec 6)!!!!}$$

$$11) \neg \textit{Antiquite}(b) \text{ contradiction avec 7)!!!!}$$

Raisonnement : exemple introductif

- Représentation sous forme d'arbre
- noeuds étiquetés par des concepts
- chemin ensemble de noeuds de la racine vers une feuille
- si contradiction ajout de \square au chemin

Dans l'exemple Les 2 chemins contiennent \square



Raisonnement : Méthode des tableaux

Méthode des tableaux

Pour prouver F : construction d'un arbre dont

- la racine est étiquetée par $\neg F$
- les noeuds sont étiquetés par des concepts
- les successeurs des noeuds sont produits par des règles d'expansion.
- on ajoute \square à la fin d'un chemin \mathcal{A} si :
 - $C(x) \in \mathcal{A}$ et $\neg C(x) \in \mathcal{A}$
 - $C(x) \in \mathcal{A}$ et $\neg C(x) \in \mathcal{A}$ et $(x = y$ ou $y = x)$
 - $\perp(x) \in \mathcal{A}$

Il existe plusieurs règles d'expansion pour construire les chemins

Raisonnement : Méthode des tableaux

\mathcal{A} : chemin

Règles pour la logique de description \mathcal{ALCN}

règle- \sqcap

condition :

\mathcal{A} contient $(C_1 \sqcap C_2)(x)$ et ne contient pas déjà $C_1(x)$ et $C_2(x)$

action :

prolongation : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C_1(x), C_2(x)\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

\mathcal{A} : chemin

Règles pour la logique de description \mathcal{ALCN}

règle- \sqcup

condition :

\mathcal{A} contient $(C_1 \sqcup C_2)(x)$ et ne contient aucun des $C_1(x)$ et $C_2(x)$

action :

branchement : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C_1(x)\}$ et $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \cup \{C_2(x)\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

\mathcal{A} : chemin

Règles pour la logique de description \mathcal{ALCN}

règle- \exists

condition :

\mathcal{A} contient $(\exists R.C)(x)$ et il n'existe aucun individu z tel que $R(x, z)$ et $C(z)$ sont aussi dans \mathcal{A}

action :

$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{R(x, y), C(y)\}$ où y est un nom d'individu qui n'existe pas déjà dans \mathcal{A}

Raisonnement : Méthode des tableaux

\mathcal{A} : chemin

Règles pour la logique de description \mathcal{ALCN}

règle- \forall

condition :

\mathcal{A} contient $(\forall R.C)(x)$ et $R(x, y)$ mais ne contient pas $C(y)$

action :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C(y)\}$$

Raisonnement : Méthode des tableaux

\mathcal{A} : chemin

Règles pour la logique de description \mathcal{ALCN}

règle- $\geq n$

condition :

\mathcal{A} contient $(\geq n R.C)(x)$ et il n'y a pas dans \mathcal{A} des individus z_1, \dots, z_n qui sont tous distincts et qui sont tels que \mathcal{A} contient $R(x, z_i)$ pour tous les individus $(1 \leq i \leq n)$

action :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{R(x, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i \neq y_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

Raisonnement : Méthode des tableaux

\mathcal{A} : chemin

Règles pour la logique de description \mathcal{ALCN}

règle- $\leq n$

condition :

\mathcal{A} contient $(\leq n R.C)(x)$ et les énonçés $R(x, y_1), \dots, R(x, y_{n+1})$. Il n'existe aucune identité $y_i = y_j$ dans \mathcal{A} pour $(1 \leq i \leq n + 1)$,
 $(1 \leq j \leq n + 1), i \neq j$

action :

Pour chaque paire possible (y_i, y_j) d'individus parmi y_i, y_{n+1} on ajoute une nouvelle branche avec $y_i = y_j$

Raisonnement : Méthode des tableaux

Méthode des tableaux

exercice

$TBox : Parent \equiv \exists aEnfant.T$

Montrer par la méthode des tableaux :

$\supseteq 2aEnfant \sqsubseteq Parent$

Raisonnement : Méthode des tableaux

Méthode des tableaux

Résultats théoriques

propriétés

- terminaison
- correction
- complétude

Raisonnement en logique de description

complexité du problème de satisfaisabilité

complexité	logique de description
PTime	\mathcal{AL} , \mathcal{ALN}
NP-complet	\mathcal{ALU} , \mathcal{ALUN}
coNP-complet	\mathcal{ALE}
PSPACE-complet	\mathcal{ALC} , \mathcal{ALCN} , \mathcal{ALCQI}
EXP-TIME	\mathcal{SHIQ} , \mathcal{SHIF}
NEXP-TIME	\mathcal{SHOIQ} , \mathcal{SHOIN}