

# Introduction au WEB Sémantique

## Cours 3 : Introduction aux logiques de description

**Odile PAPINI**

POLYTECH

Université d'Aix-Marseille

odile.papini@univ-amu.fr

<http://odile.papini.perso.esil.univmed.fr/sources/sources/WEBSEM.html>

# Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 logique  $\mathcal{AL}$ : logique de description de base
  - Langage
  - sémantique
- 3 Famille des logiques de descriptions
- 4 Logiques de description : langage des ontologies
- 5 Raisonnement en logique de description
- 6 Complexité du raisonnement

# Bibliographie I



## Supports de cours :

F. Baader, F. Calvanese & al

The Description Logic Handbook : Theory, Implementation and Applications. Cambridge university press. 2002



Amedeo Napoli INRIA Nancy

Une introduction aux logiques de description Rapport INRIA 3314. 1997

<http://hal.inria.fr/inria-00073375/en/>

## Bibliographie II



Michel Gagnon

Logiques descriptives et OWL

[http://www.cours.polymtl.ca/inf6410/Documents/logique\\_descriptive](http://www.cours.polymtl.ca/inf6410/Documents/logique_descriptive)

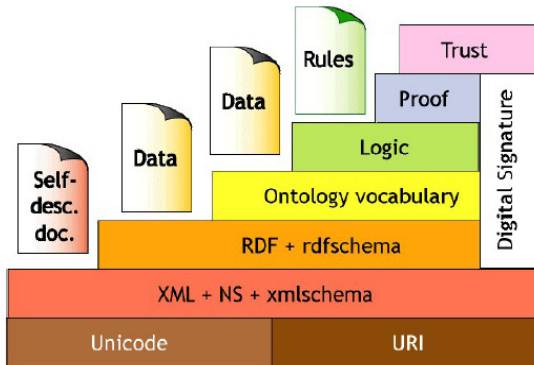


Tutoriaux

<http://dl.kr.org/courses.html>

# Le Web sémantique : Approche par couches

## Le web sémantique : structuration

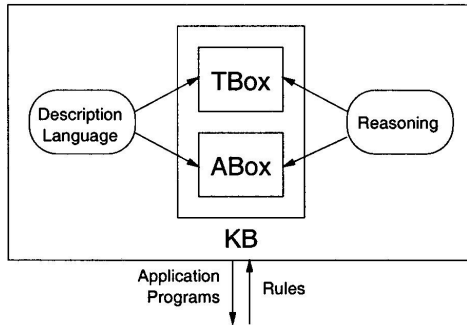


# Le Web sémantique : Approche par couches

- couche Logique
  - évolution des langages pour les ontologies
  - applications spécifique pour des connaissances déclaratives
- couche Contrôle
  - génération de contrôles, validation
- couche Sécurisation
  - signatures numériques
  - recommandations, . . .

# TBox, ABox

*F. Baader, W. Nutt*



# $\mathcal{AL}$ : logique de description de base : langage

## Vocabulaire

- Constantes :  $\top$ ,  $\perp$
- $A, B, C, D; \dots$  : concepts
- $R$  : relations binaires (rôles)
- constructeurs :  $\neg, \sqcap, \sqcup$
- quantificateurs :  $\exists, \forall$



# $\mathcal{AL}$ : logique de description de base : langage

## Procédé de formation des concepts

- $\top$  : concept universel
- $\perp$  : concept impossible
- $A$  : concept atomique
- $\neg A$  : négation d'un concept atomique
- $C \sqcap D$  : intersection de concepts quelconques
- $\forall R.C$  : restriction de valeurs pour des concepts quelconques
- $\exists R.\top$  : quantification existentielle limitée

# $\mathcal{AL}$ : logique de description de base : langage

## Procédé de formation des concepts : exemples

- concepts atomiques : *Personne*, *Homme*
- rôles atomique : *aEnfant*
- femme :  $Personne \sqcap \neg Homme$
- personnes qui ont au moins un enfant :  
 $Personne \sqcap \exists aEnfant. \top$
- personnes dont tous les enfants sont des hommes :  
 $Personne \sqcap \exists aEnfant. \top \sqcap \forall aEnfant. Homme$
- personne qui n'a pas d'enfant :  $Personne \sqcap \forall aEnfant. \perp$

## *AL*: logique de description de base : Axiomes

### Axiomes pour les *TBox*

- **Subsumption** :  $C \sqsubseteq D$  avec  $C$  et  $D$  : concepts
- **Equivalence** :  $C \equiv D$  avec  $C$  et  $D$  : concepts

### Assertions pour les *ABox*

- $C(a)$  avec  $C$  : concept et  $a$  : individu
- $R(a, b)$  avec  $R$  : rôle,  $a, b$  : individus

### Base de connaissances

$$BC = TBox \cup ABox$$

# $\mathcal{AL}$ : logique de description de base : langage

## exemples

- concepts atomiques : *Personne*, *Homme*
- rôles atomique : *aEnfant*
- individus : *anne*, *paul*

axiomes :

- $Personne \sqsubseteq \top$        $Homme \sqsubseteq Personne$
- $Femme \equiv Personne \sqcap \neg Homme$

assertions :

- $Femme(anne)$
- $aEnfant(anne, paul)$

# $\mathcal{AL}$ : logique de description de base : langage

## exemples : définition de concepts

- concepts atomiques : *Homme*
- rôles atomique : *aEnfant*, *marieAvec*
  
- *Femme*  $\equiv$ ?
- *Mere*  $\equiv$ ?
- *Parent*  $\equiv$ ?
- *ParentDeFemme*  $\equiv$ ?
- *Celibataire*  $\equiv$ ?
- *HommeMarie*  $\equiv$ ?

# $\mathcal{AL}$ : logique de description de base : sémantique

## Interprétation

- $\mathcal{I}$  interprétation :  $(\Delta^{\mathcal{I}}, f_{A^{\mathcal{I}}}, f_{R^{\mathcal{I}}})$
- $\Delta^{\mathcal{I}}$  : domaine
- fonction  $f_{A^{\mathcal{I}}}: A \rightarrow A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$
- fonction  $f_{R^{\mathcal{I}}}: R \rightarrow R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$

# $\mathcal{AL}$ : logique de description de base : sémantique

## extension à la description de concepts

- $\top^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$
- $\perp^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- $(\neg A)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}$
- $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$
- $\forall R.C = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall y, R(x, y) \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow C(y) \in C^{\mathcal{I}}\}$
- $\exists R.C = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y, R(x, y) \in R^{\mathcal{I}} \wedge C(y) \in C^{\mathcal{I}}\}$

# $\mathcal{AL}$ : logique de description de base : sémantique

## exemple

Soit l'interprétation  $\mathcal{I}$  :

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b, c, g\}$
- $aEnfant^{\mathcal{I}} = \{(a, c), (b, d), (b, e), (c, g)\}$
- $marieAvec^{\mathcal{I}} = \{(b, f), (f, b)\}$

Quelles sont les interprétations des concepts suivants :

- $Parent^{\mathcal{I}} = ?$
- $ParentDeFemme^{\mathcal{I}} = ?$
- $Celibataire^{\mathcal{I}} = ?$
- $HommeMarie^{\mathcal{I}} = ?$



# $\mathcal{AL}$ : logique de description de base : sémantique

## sémantique des axiomes et assertions

- $\mathcal{I}$  satisfait  $C \sqsubseteq D$  ssi  $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
- $\mathcal{I}$  satisfait  $C \equiv D$  ssi  $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
- $\mathcal{I}$  satisfait  $C(a)$  ssi  $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$
- $\mathcal{I}$  satisfait  $R(a, b)$  ssi  $(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}$

## Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur d'union  $\sqcup$

Union de concepts  $\mathcal{ALU}$

syntaxe

$C \sqcup D$

sémantique

$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$

exemple

- $Personne \equiv Homme \sqcup Femme$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur de négation sans restriction  $\mathcal{E}$

**quantification existentielle complète**

syntaxe

$\exists R.C$

sémantique

$$(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y, R(x, y) \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}\}$$

exemple

- $\exists a \text{Enfant.Homme}$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur de négation sans restriction  $\mathcal{C}$

**négation de concept**       $\mathcal{C}$

syntaxe

$\neg C$

sémantique

$$(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$$

exemples

- $\neg \exists a \text{Enfant.T}$
- $\neg \exists a \text{Enfant.Homme}$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## $\mathcal{AL}$ + Constructeurs $\mathcal{U}, \mathcal{C}$

### propriétés

- $\perp \equiv C \sqcap \neg C$
- $\top \equiv C \sqcup \neg C$
- $C \sqcup D \equiv \neg(\neg C \sqcap \neg D)$
- $\neg(C \sqcup D) \equiv (\neg C \sqcap \neg D)$
- $\neg(C \sqcap D) \equiv (\neg C \sqcup \neg D)$
- $\neg\neg C \equiv C$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## $\mathcal{AL}$ + Constructeurs $\mathcal{E}, \mathcal{C}$

### propriétés

- $\exists R \equiv \exists R.T$
- $\exists R.C \equiv \neg(\forall R.\neg C)$
- $\neg\exists R.C \equiv \forall R.\neg C$
- $\neg\forall R.C \equiv \exists R.\neg C$

### exemple

- $\neg\exists a \textit{Enfant.Homme} \equiv \forall a \textit{Enfant}.\neg \textit{Homme}$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

$\mathcal{AL}$  + Constructeur  $\mathcal{C}$  : logique de description  $\mathcal{ALC}$

## propriétés

disjonction :

- $C \sqcup D \equiv \neg(\neg C \sqcap \neg D)$

quantification existentielle complète :

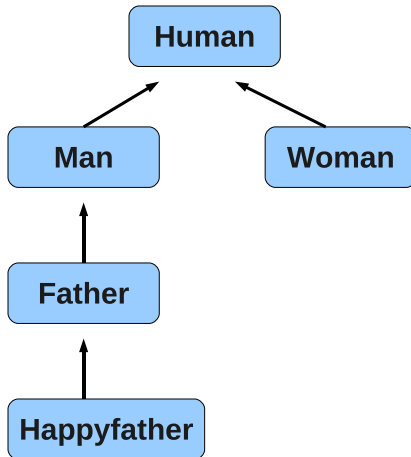
- $\exists R.C \equiv \neg(\forall R.\neg C)$

exemples

- $\exists aEnfant.Femme \equiv \neg(\forall aEnfant.\neg Femme)$

# Exercice : petite hiérarchie

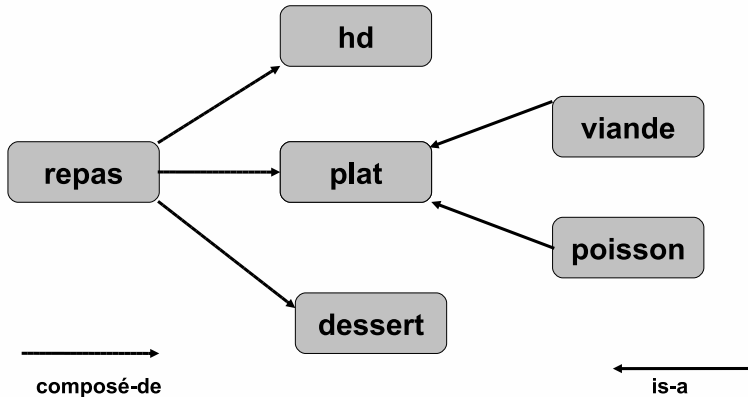
Taduire en logique de description  $\mathcal{ALC}$



← is-a



# Exercice : Petite ontologie des repas



# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## Constructeur de restriction de cardinalité $\mathcal{N}$

### syntaxe

- $\leq nR$  : au plus  $n$  dans le co-domaine de  $R$
- $\geq nR$  : au moins  $n$  dans le co-domaine du  $R$

### sémantique

- $(\leq nR)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid |y, R(x, y) \in R^{\mathcal{I}}| \leq n\}$
- $(\geq nR)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid |y, R(x, y) \in R^{\mathcal{I}}| \geq n\}$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## Constructeur de restriction de cardinalité $\mathcal{N}$

### exemples

- $\text{Homme} \sqcap \geq 2\text{aEnfant}$
- $\text{Homme} \sqcap \leq 2\text{aEnfant}$
- $\text{Homme} \sqcap \leq 2\text{aEnfant} \sqcap \geq 2\text{aEnfant}$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## Constructeur de restriction de cardinalité qualifiée $\mathcal{Q}$

### syntaxe

- $\leq nR.C$  : au plus  $n$  éléments de  $C$  dans le co-domaine de  $R$
- $\geq nR.C$  : au moins  $n$  éléments de  $C$  dans le co-domaine de  $R$

### sémantique

- $(\leq nR.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid |y, R(x, y) \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}| \leq n\}$
- $(\geq nR.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid |y, R(x, y) \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}| \geq n\}$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## Constructeur de restriction de cardinalité qualifiée $\mathcal{Q}$

### exemples

- $\text{Homme} \sqcap \geq 2a\text{Enfant.Femme}$
- $\text{Homme} \sqcap \leq 2a\text{Enfant.Femme}$
- $\text{Homme} \sqcap \leq 2a\text{Enfant.Femme} \sqcap \geq 2a\text{Enfant.Femme}$

## Exercice

Traduire en logique de description  $\mathcal{ALCQ}$  les exemples précédents

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## Constructeur d'énumération $\mathcal{O}$

### syntaxe

si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des individus alors  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  est un concept

### sémantique

$$\{a_1, \dots, a_n\}^{\mathcal{I}} = \{a_1^{\mathcal{I}}, \dots, a_n^{\mathcal{I}}\}$$

exemple :

$PACA \equiv$

$\{DPT\_84, DPT\_13, DPT\_04, DPT\_05, DPT\_83, DPT\_06\}$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## Constructeur

individus reliés à un individu spécifique par une relation  $R$

## syntaxe

$$R : a$$

## sémantique

$$(R : a)^{\mathcal{I}} = \{d \in \Delta \mid (d, a^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}\}$$

exemple :

*citoyenFrançais*  $\equiv$  *lieuNaissance : France*  $\sqcup$  *naturalisePar : France*



# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur d'inversion  $\mathcal{I}$

syntaxe

$R^-$

sémantique

$$(R^-)^{\mathcal{I}} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R^{\mathcal{I}}\}$$

exemples

- $estComposede \equiv compose^-$
- $estRegarde \equiv regarde^-$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## Constructeur de fonctions $\mathcal{F}$

rôle  $R$  comme une fonction

## sémantique

si  $(x, y) \in R^{\mathcal{I}}$  et  $(x, z) \in R^{\mathcal{I}}$  alors  $y = z$

exemple

- $\text{HommeMarie} \equiv \text{Homme} \sqcap \exists \text{marieAvec} . \top$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## Constructeur de fonctions $\mathcal{F}$

### propriétés

- $\geq 1R \equiv \exists R.T$
- $\geq 0R \equiv \top$
- $\leq 0R \equiv \forall R.\perp$

### exemple

- $T \sqsubseteq \leq 1marieAvec$
- $HommeMarie \equiv Homme \sqcap \exists marieAvec.T \sqcap \leq 1marieAvec$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

transitivité des rôles

$R$  est transitif

sémantique

si  $(x, y) \in R^{\mathcal{I}}$  et  $(y, z) \in R^{\mathcal{I}}$  alors  $(x, z) \in R^{\mathcal{I}}$

exemples

- $A \sqcap \exists \text{estComposede} . (B \sqcap \text{estComposede} . C)$  est subsumé par  $A \sqcap \text{estComposede} . C$

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## Hiérarchie des rôles $\mathcal{H}$

si  $R$  et  $S$  sont des rôles alors  $R \sqsubseteq S$  est un axiome

## sémantique

$\mathcal{I}$  satisfait  $R \sqsubseteq S$  ssi  $R^{\mathcal{I}} \subseteq S^{\mathcal{I}}$

exemple

- *composant\_de*  $\sqsubseteq$  *partie\_de*
- *parent\_de*  $\sqsubseteq$  *ancetre\_de*

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## La famille des logiques de description selon leur expressivité

- $\mathcal{AL}$  : base
- $\mathcal{ALC}$  : plus expressive
- $\mathcal{ALC} + \mathcal{H} +$  transitivité des rôles : logique  $\mathcal{SH}$
- $\mathcal{SH} + \mathcal{I} + \mathcal{F}$  : logique  $\mathcal{SHIF}$  (base de OWL-Lite)
- $\mathcal{SH} + \mathcal{I} + \mathcal{Q}$  : logique  $\mathcal{SHIQ}$
- $\mathcal{SH} + \mathcal{O} + \mathcal{I} + \mathcal{N}$  : logique  $\mathcal{SHOIN}$  (base de OWL-DL)

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

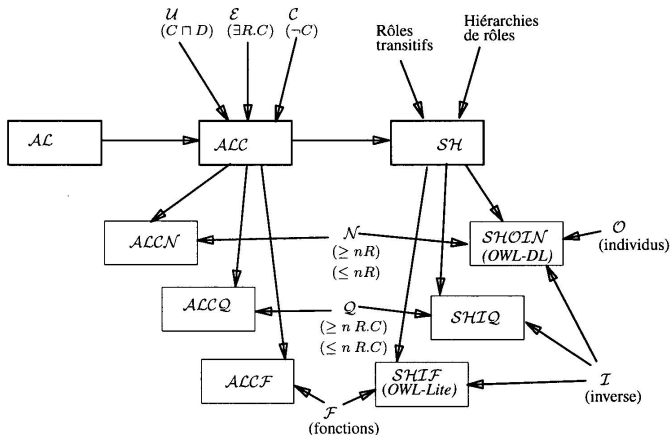


Figure: source : M. Gagnon

# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## Exercice ; définition des concepts :

- **équipe** : ensemble de personnes qui compte au moins 2 membres
  - **petite équipe** : équipe qui compte au plus 5 membres
  - **équipe moderne** : équipe qui compte au plus 4 membres, au moins un chef et dont tous les chefs sont des femmes
- 
- concepts primitifs ?
  - rôles ?
  - hiérarchies de concepts et de rôles ?
  - constructeurs de la famille  $\mathcal{AL}$  à utiliser ?
  - définition des concepts dans la logique de description adéquate ?



# Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

## Base de connaissances

- **TBox** : Terminologie
  - connaissance générique : ontologie
  - $O = \{C, R, H^C, rel, A\}$
- **Abox** : Assertions
  - description du monde : ensemble de faits
  - ensemble d'instances
- $BC = \{O, I, inst, instr\}$
- $BC = TBoX \cup ABox$

# Raisonnement

## Raisonnement sur les TBox

- satisfaisabilité
- subsomption
- équivalence
- exclusion mutuelle

# Raisonnement

## Raisonnement sur les $TBox$ : satisfaisabilité

- Un concept est **satisfaisable** par rapport  $\mathcal{T}$  ssi il existe  $\mathcal{I}$  un modèle de  $\mathcal{T}$  tel que  $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$
- si il existe  $\mathcal{I}$  un modèle de  $\mathcal{T}$  tel que  $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$  alors  $\mathcal{I}$  est un modèle de  $C$
- Un concept est **insatisfaisable** par rapport  $\mathcal{T}$  ssi pour tout  $\mathcal{I}$  un modèle de  $\mathcal{T}$  on a  $C^{\mathcal{I}} = \emptyset$

### exemples

- satisfaisabilité :  $Homme \sqcap \neg Homme?$
- modèle de  $\mathcal{T}$  :  $\Delta\{a, b, c\}$ ,  $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$ ,  
 $aEnfant^{\mathcal{I}} = \{(a, b), (a, c)\}$
- satisfaisabilité :  $Homme ?$ ,  $Femme ?$ ,  $aEnfant?$

# Raisonnement

## Raisonnement sur les TBox : subsumption

- Un concept  $C$  est **subsumé** par  $D$  par rapport à  $\mathcal{T}$  ssi pour tout  $\mathcal{I}$  modèle de  $\mathcal{T}$  on a  $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
- on écrit :  $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$

exemples

- axiome de  $\mathcal{T}$  :  $Mere \equiv \exists aEnfant.Personne$   
subsumption :  $Mere \sqsubseteq Femme?$

# Raisonnement

## Raisonnement sur les TBox : équivalence

- Deux concepts  $C$  et  $D$  sont **équivalents** par rapport à  $T$  ssi pour tout  $\mathcal{I}$  modèle de  $T$  on a  $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
- on écrit :  $T \models C \equiv D$

exemples

- équivalence :  $Pere \equiv Homme \sqcap \exists aEnfant.Personne ?$
- équivalence :  $Humain \equiv Homme \sqcup Femme ?$

# Raisonnement

## Raisonnement sur les TBox : exclusion mutuelle

- Deux concepts  $C$  et  $D$  sont **disjoints** par rapport à  $\mathcal{T}$  ssi pour tout  $\mathcal{I}$  modèle de  $\mathcal{T}$  on a  $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- on écrit :  $\mathcal{T} \models C \sqcap D \sqsubseteq \perp$

exemples

- disjoints : *Pere* et *Mere* ?
- disjoints : *Celibataire* et *Pere* ?

# Raisonnement

## Raisonnement sur les TBox : réduction à l'insatisfaisabilité

- Le concepts  $C$  est **subsumé** par le concept  $D$  par rapport à  $T$  ssi  $C \sqcap \neg D$  est insatisfaisable
- Deux concepts  $C$  et  $D$  sont **équivalents** par rapport à  $T$  ssi  $C \sqcap \neg D$  et  $\neg C \sqcap D$  sont insatisfaisables
- Deux concepts  $C$  et  $D$  sont **disjoints** par rapport à  $T$  ssi  $C \sqcap D$  est insatisfaisable

# Raisonnement

## Raisonnement sur les TBox : élimination de la TBox

- procédure de preuve : utilisation de formules indépendantes de toute terminologie
- remplacer tous les termes de la formule par leur définition dans la terminologie

- exemple :  $TBox : \textit{Femme} \equiv \textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin}$ ,  
 $\textit{Homme} \equiv \textit{Personne} \sqcap \neg \textit{Femme}$

- démontrer l'insatisfaisabilité de :  $\textit{Femme} \sqcap \textit{Homme} ?$

1)  $\textit{Femme} \sqcap \textit{Homme}$

2)  $\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \textit{Personne} \sqcap \neg \textit{Femme}$

3)  $\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin} \sqcap \textit{Personne} \sqcap \neg (\textit{Personne} \sqcap \textit{Feminin})$



# Raisonnement

## Raisonnement sur les ABox

- cohérence (consistency)
- validation d'instances (instance checking)

# Raisonnement

## Raisonnement sur les ABox : cohérence

- $\mathcal{A}$  une ABox est **cohérente** par rapport à  $\mathcal{T}$  ssi il existe  $\mathcal{I}$  un modèle de  $\mathcal{T}$  qui satisfait  $\mathcal{A}$

exemple

- TBox :  $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$ ,  
 $Homme \equiv Personne \sqcap \neg Femme$
- ABox :  $\mathcal{A} = \{Homme(anne), Femme(anne)\}$
- cohérence de  $\mathcal{A}$  ?

## Raisonnement

### Raisonnement sur les ABox : validation d'instances

- $\mathcal{A} \models C(a)$  ssi toute interprétation  $\mathcal{I}$  qui satisfait  $\mathcal{A}$  satisfait aussi  $C(a)$
- $\mathcal{A} \models C(a)$  ssi  $\mathcal{A} \cup \neg C(a)$  est incohérent

exemple

- $TBox$  :  $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$
- $ABox$  :  $\mathcal{A} = \{Femme(anne)\}$
- $\mathcal{A} \models Feminin(anne)$  ?
- $\mathcal{A} \cup \neg Feminin(anne)$  incohérent ?

## Raisonnement : Monde fermé, Monde ouvert

### hypothèse du monde fermé (clos)

- limitation à ce qui est énoncé
- exemple : *ABox* :  $a\text{Enfant}(anne, paul)$
- *anne* a un seul enfant c'est *paul*

### Logiques de Description : hypothèse du monde ouvert

- monde ouvert: pas de limitation à ce qui est énoncé
- exemple : *ABox* :  $a\text{Enfant}(anne, paul)$
- rien n'exclut que *anne* ait d'autres enfants que *paul*
- spécifier que *anne* a un seul enfant :  $(\leq 1a\text{Enfant})(anne)$

# Raisonnement

## Inférence par méthode des tableaux

- prouver  $C \sqsubseteq D$
- $C \sqsubseteq D$  ssi  $C \sqcap \neg D$  est insatisfaisable

un exemple introductif

- prouver  $\exists \textit{possede}.(Livre \sqcap Antiquite) \sqsubseteq (\exists \textit{possede}.Livre \sqcap \exists \textit{possede}.Antiquite)$
- démontrer l'insatisfaisabilité de :  
 $\exists \textit{possede}.(Livre \sqcap Antiquite) \sqcap \neg(\exists \textit{possede}.Livre \sqcap \exists \textit{possede}.Antiquite)$

## Raisonnement : Méthode des tableaux

### Méthode des tableaux

Pour prouver  $F$  : construction d'un arbre dont

- la racine est étiquetée par  $\neg F$
- les noeuds sont étiquetés par des concepts
- les successeurs des noeuds sont produits par des règles d'expansion.
- on ajoute  $\square$  à la fin d'un chemin  $\mathcal{A}$  si :
  - $C(x) \in \mathcal{A}$  et  $\neg C(x) \in \mathcal{A}$
  - $C(x) \in \mathcal{A}$  et  $\neg C(x) \in \mathcal{A}$  et  $(x = y$  ou  $y = x)$
  - $\perp(x) \in \mathcal{A}$

Il existe plusieurs règles d'expansion pour construire les chemins

## Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$ : chemin

Règles pour la logique de description  $\mathcal{ALCN}$

règle- $\sqcap$

condition :

$\mathcal{A}$  contient  $(C_1 \sqcap C_2)(x)$  et ne contient pas déjà  $C_1(x)$  et  $C_2(x)$

action :

prolongation :  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C_1(x), C_2(x)\}$

## Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$ : chemin

Règles pour la logique de description  $\mathcal{ALCN}$

règle- $\sqcup$

condition :

$\mathcal{A}$  contient  $(C_1 \sqcup C_2)(x)$  et ne contient aucun des  $C_1(x)$  et  $C_2(x)$

action :

branchement :  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C_1(x)\}$       et  $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \cup \{C_2(x)\}$



## Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$ : chemin

Règles pour la logique de description  $\mathcal{ALCN}$

règle- $\exists$

condition :

$\mathcal{A}$  contient  $(\exists R.C)(x)$  et il n'existe aucun individu  $z$  tel que  
 $R(x, z)$  et  $C(z)$  sont aussi dans  $\mathcal{A}$

action :

$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{R(x, y), C(y)\}$  où  $y$  est un nom d'individu qui n'existe  
pas déjà dans  $\mathcal{A}$

## Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$ : chemin

Règles pour la logique de description  $\mathcal{ALCN}$

règle- $\forall$

condition :

$\mathcal{A}$  contient  $(\forall R.C)(x)$  et  $R(x, y)$  mais ne contient pas  $C(y)$

action :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C(y)\}$$

## Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$ : chemin

Règles pour la logique de description  $\mathcal{ALCN}$

règle- $\geq n$

condition :

$\mathcal{A}$  contient  $(\geq n R.C)(x)$  et il n'y a pas dans  $\mathcal{A}$  des individus  $z_1, \dots, z_n$  qui sont tous distincts et qui sont tels que  $\mathcal{A}$  contient  $R(x, z_i)$  pour tous les individus  $(1 \leq i \leq n)$

action :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{R(x, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i \neq y_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

## Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$ : chemin

Règles pour la logique de description  $\mathcal{ALCN}$

règle- $\leq n$

condition :

$\mathcal{A}$  contient  $(\leq n R.C)(x)$  et les énoncés  $R(x, y_1), \dots, R(x, y_{n+1})$ . Il n'existe aucune identité  $y_i = y_j$  dans  $\mathcal{A}$  pour  $(1 \leq i \leq n+1), (1 \leq j \leq n+1), i \neq j$

action :

Pour chaque paire possible  $(y_i, y_j)$  d'individus parmi  $y_i, y_{n+1}$  on ajoute une nouvelle branche avec  $y_i = y_j$

# Raisonnement : Méthode des tableaux

## Méthode des tableaux

### exercice

$TBox : Parent \equiv \exists aEnfant.T$

Montrer par la méthode des tableaux :

$\geq 2aEnfant \sqsubseteq Parent$

# Raisonnement : Méthode des tableaux

## Méthode des tableaux

### Résultats théoriques

## propriétés

- terminaison
- correction
- complétude

## Raisonnement en logique de description

### complexité du problème de satisfaisabilité

complexité	logique de description
PTIME	$\mathcal{AL}$ , $\mathcal{ALN}$
NP-complet	$\mathcal{ALU}$ , $\mathcal{ALUN}$
coNP-complet	$\mathcal{ALE}$
PSPACE-complet	$\mathcal{ALC}$ , $\mathcal{ALCN}$ , $\mathcal{ALCQI}$
EXP-TIME	$\mathcal{SHIQ}$ , $\mathcal{SHIF}$
NEXP-TIME	$\mathcal{SHOIQ}$ , $\mathcal{SHOIN}$