Introduction au WEB Sémantique
Cours 4 : Raisonner avec une ontologie : raisonner en logique de description

Odile PAPINI

POLYTECH
Université d'Aix-Marseille
odile.papini@univ-amu.fr
http://odile.papini.perso.luminy.univ-amu.fr/sources/WEBSEM.html

Plan du cours

Bibliographie I

- Supports de cours :
  F. Baader, F. Calvanese & al
  The Description Logic Handbook : Theory, Implementation and Applications. Cambridge university press. 2002
- Amedeo Napoli INRIA Nancy
  Une introduction aux logiques de description Rapport INRIA 3314. 1997
  http ://hal.inria.fr/inria-00073375/en/
- Michel Gagnon
  Logiques descriptives et OWL
  http ://www.cours.polymtl.ca/inf6410/Documents/logique_descriptive.pdf
- Tutoriaux
  http ://dl.kr.org/courses.html

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox

- satisfaisabilité
- subsomption
- équivalence
- exclusion mutuelle

Raisonnement sur les *TBox* : satisfaisabilité

- Un concept est satisfaisable par rapport à $\mathcal{T}$ ssi il existe $\mathcal{I}$ un modèle de $\mathcal{T}$ tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$
- si il existe $\mathcal{I}$ un modèle de $\mathcal{T}$ tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{I}$ est un modèle de C
- Un concept est insatisfaisable par rapport à $\mathcal{T}$ ssi pour tout $\mathcal{I}$ un modèle de $\mathcal{T}$ on a $C^{\mathcal{I}} = \emptyset$

exemples

- satisfaisabilité : $Homme \sqcap \neg Homme?$
- modèle de $\mathcal{T}$: $\Delta\{a, b, c\}$, $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$, $aEnfant^{\mathcal{I}} = \{(a, b), (a, c)\}$
  satisfaisabilité : $Homme$?, $Femme$?, $aEnfant$?

Raisonnement sur les *TBox* : satisfaisabilité

- Un concept est satisfaisable par rapport à $\mathcal{T}$ ssi il existe $\mathcal{I}$ un modèle de $\mathcal{T}$ tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$
- si il existe $\mathcal{I}$ un modèle de $\mathcal{T}$ tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{I}$ est un modèle de C
- Un concept est insatisfaisable par rapport à $\mathcal{T}$ ssi pour tout $\mathcal{I}$ un modèle de $\mathcal{T}$ on a $C^{\mathcal{I}} = \emptyset$

exemples

- satisfaisabilité : $(Homme \sqcap \neg Homme)^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- modèle de $\mathcal{T}$: $\Delta = \{a, b, c\}$, $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$, $aEnfant^{\mathcal{I}} = \{(a, b), (a, c)\}$
  satisfaisabilité : $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$, $Femme^{\mathcal{I}} = \{c\}$

Exemple (cours Logiques de description)

TBox $\mathcal{T}$:

$$Femme \equiv \neg Homme,$$
$$Mere \equiv Femme \sqcap \exists aEnfant.\top$$
$$Pere \equiv Homme \sqcap \exists aEnfant.\top$$
$$Celibataire \equiv \forall marieAvec.\bot$$

modèle de $\mathcal{T}$:
$\Delta = \{a, b, c, d\},\ Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b\},\ Femme^{\mathcal{I}} = \{c, d\},$
$aEnfant^{\mathcal{I}} = \{(b, a), (b, c), (d, a), (d, c)\}$
$Pere^{\mathcal{I}} = \{b\},\ Mere^{\mathcal{I}} = \{d\},$
$EstmarieAvec^{\mathcal{I}} = \{(b, d), (d, b)\},\ Celibataire^{\mathcal{I}} = \{a, c\}$

Raisonnement sur les TBox : subsomption

- Un concept C est subsumé par D par rapport à T ssi pour tout $\mathcal{I}$ modèle de $\mathcal{T}$ on a $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$

exemples

- axiome de $\mathcal{T}$: $Mere \equiv \exists aEnfant.\top$
  subsomption : $Mere \sqsubseteq Femme$?

Raisonnement sur les TBox : subsomption

- Un concept C est subsumé par D par rapport à $\mathcal{T}$ ssi pour tout $\mathcal{I}$ modèle de $\mathcal{T}$ on a $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$

exemples

- axiome de $\mathcal{T}$: $Mere \equiv \exists aEnfant.\top$
  subsomption : $Mere \sqsubseteq Femme$
  car $Mere^{\mathcal{I}} = \{d\}$ et $Femme^{\mathcal{I}} = \{c, d\}$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : équivalence

- Deux concepts C et D sont équivalents par rapport à T ssi pour tout $\mathcal{I}$ modèle de $\mathcal{T}$ on a $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \equiv D$

exemple

- équivalence : $Pere \equiv Homme \sqcap \exists aEnfant.\top$?

Raisonnement sur les TBox : équivalence

- Deux concepts C et D sont équivalents par rapport à T ssi pour tout $\mathcal{I}$ modèle de $\mathcal{T}$ on a $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \equiv D$

exemples

- équivalence : $Pere \equiv Homme \sqcap \exists aEnfant.\top$
  car $Pere^{\mathcal{I}} = \{b\}$, $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$ et $\exists aEnfant.\top^{\mathcal{I}} = \{b, d\}$

Raisonnement sur les TBox : exclusion mutuelle

- Deux concepts C et D sont disjoints par rapport à $\mathcal{T}$ ssi pour tout $\mathcal{I}$ modèle de $\mathcal{T}$ on a $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqcap D \sqsubseteq \bot$

exemples

- disjoints : *Pere* et *Mere* ?
- disjoints : *Celibataire* et *Pere* ?

Raisonnement sur les TBox : exclusion mutuelle

- Deux concepts C et D sont disjoints par rapport à T ssi pour tout $\mathcal{I}$ modèle de $\mathcal{T}$ on a $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqcap D \sqsubseteq \perp$

exemples

- disjoints : *Pere et Mere* car $Pere^{\mathcal{I}} = \{b\}$ et $Mere^{\mathcal{I}} = \{d\}$
- disjoints : *Celibataire et Pere* car $Celibataire^{\mathcal{I}} = \{a, c\}$ et $Pere^{\mathcal{I}} = \{b\}$

Raisonnement sur les TBox : réduction à l'insatisfaisabilité

- Le concepts C est subsumé par le concept D par rapport à $\mathcal{T}$ ssi $C \sqcap \neg D$ est insatisfaisable
- Deux concepts C et D sont équivalents par rapport à $\mathcal{T}$ ssi $C \sqcap \neg D$ et $\neg C \sqcap D$ sont insatisfaisables
- Deux concepts C et D sont disjoints par rapport à $\mathcal{T}$ ssi $C \sqcap D$ est insatisfaisable

Raisonnement sur les TBox : élimination de la TBox

- procédure de preuve : utilisation de formules indépendantes de toute terminologie
- remplacer tous les termes de la formule par leur définition dans la terminologie

- exemple : $TBox$: $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$, $Homme \equiv Personne \sqcap \neg Femme$
- démontrer l'insatisfaisabilité de : $Femme \sqcap Homme$?

1) $Femme \sqcap Homme$
2) $Personne \sqcap Feminin \sqcap Personne \sqcap \neg Femme$
3) $Personne \sqcap Feminin \sqcap Personne \sqcap \neg(Personne \sqcap Feminin)$

Raisonnement sur les TBox : élimination de la TBox

- exemple : $TBox$: $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$, $Homme \equiv Personne \sqcap \neg Femme$
- démontrer l'insatisfaisabilité de : $Femme \sqcap Homme$

1) $Femme \sqcap Homme$
2) $Personne \sqcap Feminin \sqcap Personne \sqcap \neg Femme$
3) $Personne \sqcap Feminin \sqcap Personne \sqcap \neg(Personne \sqcap Feminin)$
4) $Personne \sqcap Feminin \sqcap \neg(Personne \sqcap Feminin)$ par idempotence
5) $Personne \sqcap Feminin \sqcap (\neg Personne \sqcup \neg Feminin)$ par distributivité
6) $(Personne \sqcap Feminin \sqcap \neg Personne) \sqcup (Personne \sqcap Feminin \sqcap \neg Feminin)$

Or $(Personne \sqcap Feminin \sqcap \neg Personne)^{\mathcal{I}} = \emptyset$ **et** $(Personne \sqcap Feminin \sqcap \neg Feminin)^{\mathcal{I}} = \emptyset$

Raisonnement sur les ABox

- cohérence (consistency)
- validation d'instances (instance checking)

Raisonnement sur les ABox : cohérence

- $\mathcal{A}$ une *ABox* est cohérente par rapport à $\mathcal{T}$ ssi il existe $\mathcal{I}$ un modèle de $\mathcal{T}$ qui satisfait $\mathcal{A}$

exemple

- *TBox* : $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$, $Homme \equiv Personne \sqcap \neg Femme$
- *ABox* : $\mathcal{A} = \{Homme(anne), Femme(anne)\}$
- cohérence de $\mathcal{A}$?

Raisonnement sur les ABox : cohérence

exemple

- $TBox$: $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin,$
  $Homme \equiv Personne \sqcap \neg Femme$
- $ABox$: $\mathcal{A} = \{Homme(anne), Femme(anne)\}$
- cohérence de $\mathcal{A}$?

modèle de $\mathcal{T}$:
$\Delta = \{paul, jean, anne, marie\}$,
$Personne^{\mathcal{I}} = \{paul, jean, anne, marie\}$, $Feminin^{\mathcal{I}} = \{anne, marie\}$,
$Femme^{\mathcal{I}} = \{anne, marie\}$, $Homme^{\mathcal{I}} = \{paul, jean\}$,

incohérence de $\mathcal{A}$ car $anne \notin Homme^{\mathcal{I}}$

Raisonnement sur les ABox : validation d'instances

- $\mathcal{A} \models C(a)$ ssi toute interprétation $\mathcal{I}$ qui satisfait $\mathcal{A}$ satisfait aussi $C(a)$

- $\mathcal{A} \models C(a)$ ssi $\mathcal{A} \cup \neg C(a)$ est incohérent

exemple

- $TBox$: $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$
- $ABox$: $\mathcal{A} = \{Femme(anne)\}$
- $\mathcal{A} \models Feminin(anne)$?
- $\mathcal{A} \cup \neg Feminin(anne)$ incohérent ?

Raisonnement sur les ABox : validation d'instances

exemple

- $TBox$: $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$
- $ABox$: $\mathcal{A} = \{Femme(anne)\}$
- $\mathcal{A} \models Feminin(anne)$?
- $\mathcal{A} \cup \neg Feminin(anne)$ incohérent ?

modèle de $\mathcal{T}$:
$\Delta = \{paul, jean, anne, marie\}$,
$Personne^{\mathcal{I}} = \{paul, jean, anne, marie\}$, $Feminin^{\mathcal{I}} = \{anne, marie\}$,
$Femme^{\mathcal{I}} = \{anne, marie\}$, $(\neg Feminin)^{\mathcal{I}} = \{paul, jean\}$,
$\mathcal{A} \cup \neg Feminin(anne)$ incohérent car $anne \in Femme^{\mathcal{I}}$ et
$anne \notin (\neg Feminin)^{\mathcal{I}}$

Raisonnement : Monde fermé, Monde ouvert

hypothèse du monde fermé (clos)

- limitation à ce qui est énoncé

- exemple : $ABox$: $aEnfant(anne, paul)$
- $anne$ a un seul enfant c'est $paul$

Logiques de Description : hypothèse du monde ouvert

- monde ouvert : pas de limitation à ce qui est énoncé

- exemple : $ABox$: $aEnfant(anne, paul)$
- rien n'exclut que $anne$ ait d'autres enfants que $paul$
- spécifier que $anne$ a un seul enfant : $(\leq 1 aEnfant)(anne)$

Raisonnement

Inférence par méthode des tableaux

- prouver $C \sqsubseteq D$
- $C \sqsubseteq D$ ssi $C \sqcap \neg D$ est insatisfaisable

un exemple introductif

- prouver :
  $\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqsubseteq (\exists possede.Livre \sqcap \exists possede.Antiquite)$

- démontrer l'insatisfaisabilité de :
  $\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqcap \neg(\exists possede.Livre \sqcap \exists possede.Antiquite)$

Raisonnement : exemple introductif

démontrer l'insatisfaisabilité de :
$\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqcap \neg(\exists possede.Livre \sqcap \exists possede.Antiquite)$ ssi
$\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqcap (\forall possede.\neg Livre \sqcup \forall possede.\neg Antiquite)$
On suppose q'un individu a est membre ce concept
1) $\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqcap (\forall possede.\neg Livre \sqcup \forall possede.\neg Antiquite)(a)$
On a

2) $\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite)(a)$
3) $\forall possede.\neg Livre \sqcup \forall possede.\neg Antiquite(a)$

Il existe un objet b

4) $possede(a, b)$
5) $Livre \sqcap Antiquite(b)$

donc

6) $Livre(b)$
7) $Antiquite(b)$

démontrer l'insatisfaisabilité de :

1) $\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqcap (\forall possede.\neg Livre \sqcup \forall possede.\neg Antiquite)(a)$

On a

2) $\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite)(a)$
3) $\forall possede.\neg Livre \sqcup \forall possede.\neg Antiquite(a)$

donc

8) $\forall possede.\neg Livre(a)$
9) $\forall possede.\neg Antiquite(a)$

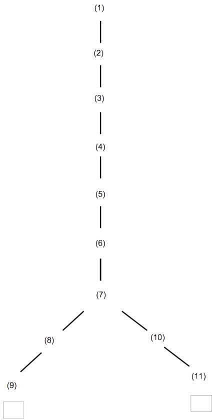
Par 4) a possede un objet b

10) $\neg Livre(b)$ contradiction avec 6) ! ! ! !
11) $\neg Antiquite(b)$ contradiction avec 7) ! ! ! !

Raisonnement : exemple introductif

- Représentation sous forme d'arbre
- noeuds étiquetés par des concepts
- chemin ensemble de noeuds de la racine vers une feuille
- si contradiction ajout de □ au chemin

Dans l'exemple Les 2 chemins contiennent □



Méthode des tableaux

Pour prouver F : construction d'un arbre dont

- la racine est étiquetée par $\neg F$
- les noeuds sont étiquetés par des concepts
- les successeurs des noeuds sont produits par des règles d'expansion.
- on ajoute $\square$ à la fin d'un chemin $\mathcal{A}$ si :
  - $C(x) \in \mathcal{A}$ et $\neg C(x) \in \mathcal{A}$
  - $C(x) \in \mathcal{A}$ et $\neg C(x) \in \mathcal{A}$ et $(x = y$ ou $y = x)$
  - $\perp(x) \in \mathcal{A}$

Il existe plusieurs règles d'expansion pour construire les chemins

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique de description $\mathcal{ALCN}$

règle-$\sqcap$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $(C_1 \sqcap C_2)(x)$ et ne contient pas déja $C_1(x)$ et $C_2(x)$

action :

prolongation : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C_1(x), C_2(x)\}$

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique de description $\mathcal{ALCN}$

règle-$\sqcup$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $(C_1 \sqcup C_2)(x)$ et ne contient aucun des $C_1(x)$ et $C_2(x)$

action :

branchement : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C_1(x)\}$ et $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \cup \{C_2(x)\}$

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique de description $\mathcal{ALCN}$

règle-$\exists$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $(\exists R.C)(x)$ et il n'exixte aucun individu z tel que $R(x,z)$ et $C(z)$ sont aussi dans $\mathcal{A}$

action :

$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{R(x,y), C(y)\}$ où y est un nom d'individu qui n'existe pas déjà dans $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique de description $\mathcal{ALCN}$

règle-$\forall$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $(\forall R.C)(x)$ et $R(x,y)$ mais ne contient pas$C(y)$

action :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C(y)\}$$

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique de description $\mathcal{ALCN}$

règle-$\geq n$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $(\geq n\, R.C)(x)$ et il n'y a pas dans $\mathcal{A}$ des individus $z_1, \cdots, z_n$ qui sont tous distincts et qui sont tels que $\mathcal{A}$ contient $R(x, z_i)$ pour tous les individus $(1 \leq i \leq n)$

action :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{R(x, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i \neq y_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique de description $\mathcal{ALCN}$

règle-$\leq n$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $(\leq n\, R.C)(x)$ et les énonçés $R(x, y_1), \cdots R(x, y_{n+1})$. Il n'existe aucune identité $y_i = y_j$ dans $\mathcal{A}$ pour $(1 \leq i \leq n+1)$, $(1 \leq j \leq n+1)$, $i \neq j$

action :

Pour chaque paire possible (y_i, y_j) d'individus parmi y_i, y_{n+1} on ajoute une nouvelle branche avec $y_i = y_j$

Méthode des tableaux

exercice

$$TBox : Parent \equiv \exists aEnfant.\top$$

Montrer par la méthode des tableaux :

$$\geq 2aEnfant \sqsubseteq Parent$$

Méthode des tableaux

Résultats théoriques

propriétés

- terminaison
- correction
- complétude

complexité du problème de satisfaisabilité

complexité	logique de description
PTIME	$\mathcal{AL}$, $\mathcal{ALN}$
NP-complet	$\mathcal{ALU}$, $\mathcal{ALUN}$
coNP-complet	$\mathcal{ALE}$
PSPACE-complet	$\mathcal{ALC}$, $\mathcal{ALCN}$, $\mathcal{ALCQI}$
EXP-TIME	$\mathcal{SHIQ}$, $\mathcal{SHIF}$
NEXP-TIME	$\mathcal{SHOIQ}$, $\mathcal{SHOIN}$